Włoska olimpiada

1. Znaleźć wszystkie trójki p, q, n, gdzie p, q pierwsze a n całkowite dodatnie, że:

$$p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$$

2. Pokazać, że jeśli liczba 6-cyfrowa o wszystkich cyfrach różnych i różnych od 0 dzieli się przez 37, to permutując jej cyfry można uzyskać jeszcze przynajmniej 23 inne liczby podzielne przez 37.

3. Funkcje $f, g : [2, 4] \to [2, 4]$ spełniają warunki:

$$f(g(x)) = x, g(f(x)) = x, f(x)g(x) = x^2$$

Pokazać, że dla każdego $x \in [2, 4]$ zachodzi $f(x) = g(x) = x$.

4. Liczby rzeczywiste x, y, a, b, c spełniają równości:

$$\begin{aligned} a^3 &= ax + y \\ b^3 &= bx + y \\ c^3 &= cx + y \end{aligned}$$

przy czym $a \neq b \neq c$. Pokazać, że $a + b + c = 0$.

5. Dany jest trójkąt ABC i prosta r. Niech D, E, F będą rzutami A, B, C na prostą r. Niech h_a, h_b, h_c będą prostymi prostopadłymi do boków BC, AC, AB przechodzącymi odpowiednio przez D, E, F. Pokazać, że h_a, h_b, h_c przecinają się w jednym punkcie.

6. Pokazać, że dla $0 < x, y, z < 1$ zachodzi:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

7. Pokazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego zachodzi:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))$$

.

8. Punkt P leży na płaszczyźnie, zaś H, J, K to odpowiednio jego rzuty na proste BC, AC, AB odcinające trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg opisany na trójkącie HJK przecina prostą BC ponownie w D, AC ponownie w E zaś AB ponownie w F. Pokazać, że proste prostopadłe do BC, AC, AB poprowadzone odpowiednio w D, E, F przecinają się w jednym punkcie.

9. Pokazać, że dla dowolnych m, n, a, b, c rzeczywistych dodatnich zachodzi:

$$\frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geqslant \frac{3}{m+n}$$