Powrót wielomianów

1. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 1. Pokazać, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p istnieje takie a całkowite, że $p|P(a)$.

2. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 1. Pokazać, że nierówność:

$$|P(x) - P(0)| < |x|$$

jest spełniona dla skończonej liczby liczb całkowitych x.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają żownania:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -3 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \\ abc + abd + acd + bcd = 3 \end{cases}$$

Pokazać, że istnieje taka liczba rzeczywista M, że $M \leqslant abcd \leqslant -2$.

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych dla których wielomian P przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

5. Stopień wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi:

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1$$

Pokazać, że dla każdej liczby rzeczywistej zachodzi $P(x) = x$.

6. Dany jest czworościan $ABCD$ (niekoniecznie foremny) mający nastepującą własność: Istnieje sfera $\kappa = \kappa(A, B, C)$, dla której:

(a) BC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną BCD

(b) AC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ACD

(c) AB jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ABD

Udowodnić, że istnieją sfery $\kappa(A, B, D)$, $\kappa(B, C, D)$ i $\kappa(C, A, D)$ mające analogiczne własności do (a), (b) i (c).