Definicja 1. *Wielomian $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych i, j zachodzi*

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= W(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Definicja 2. *Niech*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n = x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

So to tak zwane wielomiany symetryczne podstawowe.

Twierdzenie o wielomianach symetrycznych. *Jeśli $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest wielomianem symetrycznym, to istnieje taki wielomian $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, że $W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.*

Wniosek. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

1. Liczby a, b, c spełniają równość $a + b + c = 0$. Udowodnij, że:
   - $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
   - $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$
   - $\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$
   - $\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^5+b^5+c^5}{5}$
2. Rozłóż na czynniki pierwsze wielomian $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.
3. Udowodnij, że
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \frac{a + b + c}{2}.$$
4. Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8} \\ xy + yz + zx = x + y + z \\ xyz = 1. \end{cases}$$
5. Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$$
6. Dla $a, b, c \geq 0$ udowodnij, że $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
7. Dla $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$ udowodnij, że $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq \frac{2}{9}$.
8. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$.
9. Która z liczb jest większa: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ czy $\sqrt[3]{24}$.
10. Znajdź dzielnik liczby $2^{33} + 2^{17} + 1$ większy niż 1000 a mniejszy niż 2000.