

## Wielomiany

1. Wielomian  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych spełnia warunki  $17|W(15), 13|W(0), 9|W(11)$ . Pokazać, że  $1989|W(1001)$ .

2. Dany jest ciąg  $X$  2005 liczb całkowitych  $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$  o następującej własności: dla dowolnego wielomianu  $P(x)$  stopnia 2 o współczynnikach całkowitych istnieją trzy elementy ciągu  $X$ , mianowicie  $k, l, m$ , że  $P(k) = P(l) = P(m)$ . Pokazać, że w ciągu  $X$  istnieje co najmniej jedna trójka równych wyrazów.

3. Dana jest liczba całkowita  $n \geq 2$ . Znaleźć wszystkie wielomiany  $P$  o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnego  $x$  całkowitego zachodzi  $P(x)^n = P(x^n)$ .

4. Rozwiązać układ równań w rzeczywistych  $a, b, c, d$ :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1 \\ abc + abd + acd + bcd = -16 \\ abcd = -12. \end{cases}$$

5. Rozwiązać układ równań w dodatnich  $a, b, c$

$$\begin{cases} ab + bc + ac = 12 \\ a + b + c + 2 = abc. \end{cases}$$

6. Pokazać, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych  $W$  dla sześciu różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 12, to nie ma pierwiastków całkowitych.

7. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 1 mający wszystkie możliwe wartości będące liczbami złożonymi?

8. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 1 mający wszystkie możliwe wartości nie będące liczbami złożonymi?