Kółko z widokiem na wakacje

1. Znaleźć wszytskie pary m, n całkowitych dodatnich, że:

$$2! + 3! + 4! + \ldots + n! = m^3$$

2. Pokazać, że dla każdego pierwszego $p \geqslant 5$ istnieją takie różne liczby $0 \leqslant n, m < \sqrt{p}$, że $p - n^2 | p - m^2$.

3. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $m \geqslant 4$ liczba $\lfloor \frac{(m-1)!}{m} \rfloor$ jest parzysta.

4. Czy z kwadratu $7,99 \times 7,99$ da się wyciąć 50 kwadratów jednostkowych?

5. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach P i Q. Punkty A_1 i A_2 nalerą do o_1 a B_1 i B_2 nalerą do o_2, przy czym P należy do odcinków A_1B_1 oraz A_2B_2. Pokazać, że kąt pomiędzy prostymi A_1A_2 i B_1B_2 nie zależy od wyboru punktów A_i i B_i.

6. Dana jest sfera S, okrąg o należący do sfery i punkt P poza nią. Poprowadzono wszystkie proste pomiędzy punktami z o a P, a zbiór ich drugich przecięć z S nazwano A. Pokazać, że A jest okręgiem.

7. Na płaszczyźnie jest umieszczonych nieskończenie wiele modliszek. Każda z nich może się poruszać z prędkością 5 metrów na minutę oraz na początku każde dwie oddalone są od siebie o co najmniej 2 metry. Jeśli dwie żywe modliszki spotkają się w tym samym punkcie, to jedna może zjeść drugą, zaś modliszka umiera po minucie od zjedzenia swojego ostatniego współbratymca. Pokazać, że po kwadransie wszystkie modliszki będą martwe.

8. Niech $ABCD$ będzie ustalonym czworokątem wypukłym, którego boki BC i AD są równej długości i nie są równoległe. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i AD, są różne od wierzchołków A, B, C, D oraz $BE = DF$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, proste BD i EF przecinają się w punkcie Q, proste EF i AC przecinają się w punkcie R. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty PQR, dla zmieniających położenie punktów E i F. Dowieść, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny, różny od punktu P.