Zadania troszeczkę trudniejsze od pozostałych

VII Warsztaty Matematyczne

1. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $4n\{n\sqrt{2}\} > \sqrt{2}$, zaś $\sqrt{2}$ jest najlepszym oszacowaniem prawej strony.

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że:

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

3. Rozsztrzygnąć, czy istnieje taki zbiór $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$, o mocy 2012, że:

- $1 \in A$
- $2^{1996} - 1 \in A$
- każdy element A różny od 1 jest sumą dwóch, niekoniecznie różnych elementów A

4. Leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$ punkt K spełnia własności: środek boku AD jest równoodległy od punktów C i od K oraz środek boku CD jest równoodległy od punktów A i od K. Pokazać, że jeśli punkt N jest środkiem odcinka BK, to $\angle NAK = \angle NCK$.

5. Niech $ABCD$ będzie prostokątem o bokach m i n złożonym z mn kwadracików jednostkowych, gdzie m i n są dwoma względnie pierwszymi liczbami nieparzystymi. Przekątna AC przecina kwadraciki kolejno punktach $A_1, A_2, \ldots, A_k$, gdzie $A_1 = A$, $A_k = C$ i punkty te leżą właśnie w tej kolejności na prostej AC. Pokazać, że:

$$A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - \ldots + (-1)^k A_{k-1}A_k = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}$$

.

6. W lesie, w którym drzewa rosną w punktach kratowych płaszczyzny jest ustawiona ciężarówka mająca kształt odcinka długości 10. Ciężarówkę wolno dowolnie przesuwać i obracać, nie może ona jednak zahaczyć o żadne drzewo w żadnym momencie ruchu. Pokazać, że ciężarówkę da się odwrócić (czyli postawić na tym samym miejscu odwróconą).

7. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ punkty M, N, P, Q, S są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EA. Pokazać, że jeśli proste DM,EN,AP,BQ mają punkt wspólny, to należy on również do odcinka CS.

8. Liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 2006} = \frac{1}{2006}$$

Pokazać, że zachodzi:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant 2006(n-1)$$

9. Ciąg a_i jest ciągiem liczb całkowitych dodatnich, zaś ciąg b_i jest ciągiem liczb powstających przez odwrócenie zapisu dziesiętnego wyrazów ciągu a_i (obcinając wiodące zera). Ponadto wiadomo, że dla każdego $i \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $a_{i+1} = a_i + b_i$. Rozstrzygnąć, czy a_7 może być liczbą pierwszą.

10. Onufry i Joasia grają w grę. Naprzemian piszą na tablicy wybraną przez siebie liczbę z przedziału od 1 do n. Ten, który napiszę liczbę będącą dzielnikiem liczby już napisanej przegrywa. Grę zaczyna Joasia. Dla jakich n Joasia ma strategię wygrywającą, tzn. może niezależnie od ruchów Onufrego tak grać, aby wygrać?