Różne triki

DEF $A = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

1. Funkcja $f(x) : A \longrightarrow A$ spełnia warunki: $f(0) = 0$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n+1) = f(n) + 1$ dla każdego $n \in A$. Znaleźć dla każdego $m \in A$ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ wśród liczb ze zbioru A mniejszych od 4^m.

2. Funkcja $f(x) : A \longrightarrow A$ spełnia warunki: $f(0) = 0$, $f(2n) = 3f(n)$, $f(2n+1) = f(2n)+1$ dla każdego $n \in A$. Jakie liczby stanowią zbiór wartości f?

3. Funkcja $f(x) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ spełnia warunki: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$, $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $f(n) = n$ w $0 < n \leqslant 1988$.

4. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x, y) jest przyporządkowana liczba $f(x, y)$ zgodnie z warunkami: $f(0, 0) = 0$, $f(2x, 2y) = f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$, $f(2x + 1, 2y) = f(2x, 2y + 1) = f(x, y) + 1$ dla $x, y \geqslant 0$. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a, b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie $f(a, x) + f(b, x) = n$.

5. Pokazać, że pole trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

6. Pokazać, że nie istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach w punktach kratowych.

7. Pokazać, że jeśli dla pewnego $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, to dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}^+$ liczba $a^n + \frac{1}{a^n}$ też jest całkowita.