....

imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VII Warsztaty Matematyczne

Klasa druga i trzecia

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Jeśli a i b są liczbami całkowitymi dodatnimi, to liczba $\frac{ab}{a+b}$ może być:

☐ mniejsza od 1.
☐ każdą liczbą całkowitą dodatnią.
☐ większa niż 2006^{2006}.

2. Zbiór A jest zbiorem punktów płaszczyzny o co najmniej jednej współrzędnej niewymiernej.

☐ Istnieje prosta należąca do zbioru A.
☐ Istnieje okrąg należący do zbioru A.
☐ Każde dwa punkty ze zbioru A da się połączyć łamaną zawartą w zbiorze A.

3. W grzybobraniu wzięła udział cała rodzina. Marek znalazł tyle samo prawdziwków, co jego syn, a Tomasz znalazł 3 razy więcej prawdziwków niż jego syn. Beata, żona Tomasza, i żona Marka Agnieszka znalazły w sumie 2 razy więcej prawdziwków niż syn Marka. Jeśli cała rodzina została już wymieniona i zebrała w sumie 77 prawdziwków, to:

☐ Marek uzbierał 11 grzybów.
☐ Marek jest synem Tomasza.
☐ Tomasz jest synem Marka.

4*. Ustawiamy skoczka szachowego na dowolnym polu szachownicy $n \times n$ i próbujemy wykonując nim standardowe ruchy odwiedzić każde pole szachownicy dokładnie raz i wrócić na pole początkowe. Da się to zrobić dla:

- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 4$
- ☐ $n = 7$

5. Czy prawdziwe są następujące nierówności?

- ☐ $22^{55} > 55^{22}$
- ☐ $2006 \cdot 200720072007 > 2007 \cdot 200620062006$
- ☐ $\sqrt{2005} + \sqrt{2007} > 2\sqrt{2006}$

6. $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, gdzie a_n i b_n są całkowite. Wynika z tego, że:

- ☐ $a_{n+1} - a_n = b_{n+1} + b_n$
- ☐ $NWD(a_n, b_n) = 3$ dla pewnego n.
- ☐ $6|b_{666}$.

7. W kwadracie 5×5 umieściliśmy 26 punktów. Czy możliwe, aby najmniejsza odległośc między dwoma z nich była równa:

- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$

8. Krawędzie sześcianu ponumerowano dwunastoma różnymi liczbami ze zbioru od 1 do 13 tak, by suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była równa. Czy ta suma może być równa:

- ☐ 19.
- ☐ 21.
- ☐ 23.

9. Liczby p i $8p^2 + 1$ są pierwsze. Wynika stąd, że:

- ☐ liczba $p^3 + 2$ może być złożona.
- ☐ nie ma takiej liczby p.
- ☐ $5|p^{2006} + 1$.

10*. Przekątne czworokąta mają długości 5 i 12. Wówczas:

- ☐ jego pole może wynosić 29.
- ☐ zawsze można go zmieścić w okręgu o promieniu $6\frac{1}{3}$.
- ☐ może być on trapezem.

11. W księstwie Hofmańskim książe założył miasta A, B, C, D, E. Wielki mierniczy zmierzył odległości i uzyskał wyniki: odległość między A i B wynosi 36 kilometrów, między A i D 131 kilometrów, między B i C 64 kilometry, między C i E 80 kilometrów, między A i E 60 kilometrów zaś między C i D 31 kilometrów. Wówczas:

- ☐ Odległość między B i E wynosi 48 kilometrów
- ☐ kąt BCE jest prosty.
- ☐ kąt EBD jest prosty.

12*. W pewnej grze dwaj gracze naprzemian kładą kostki domina (2×1) na pola planszy. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu. Strategię wygrywająca ma pierwszy gracz, jeśli plansza ma kształt:

- ☐ szachownicy 8×8 z wyciętymi przeciwległymi rogami.
- ☐ szachownicy 7×8.
- ☐ szachownicy 7×7 z wyciętym środkowym polem.

13. Dla każdego $n > 2$ istnieje n-kąt mający:

- ☐ n osi symetrii.
- ☐ $n + 1$ osi symetrii, jeśli n parzyste.
- ☐ mający dwa różne środki symetrii, jeśli n jest nieparzyste.

14*. W ciągu arytmetycznym postaci $an+b$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, zaś a, b są całkowite dodatnie:

☐ musi istnieć potęga liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.
☐ musi istnieć potęga liczby naturalnej jeśli $a \perp b$.
☐ musi istnieć liczba pierwsza.

15. Funkcja f jest parzysta a g nieparzysta. Wówczas:

☐ $f(g(f(g(f(g(x))))))$ jest parzysta.
☐ $g(f(g(f(g(f(x))))))$ jest nieparzysta.
☐ $g(g(g(f(x^2))))$ jest nieparzysta.

16. Czy:

☐ rzut czworościanu może być kwadratem?
☐ wśród 5 punktów na sferze istnieją conajmniej 4 na jednej półsferze (z brzegiem)?
☐ przekrój sześcianu może być siedmiokątem?

17. W trójkącie ABC boki AB i AC mają długości 2 i 3. Czy środkowa spuszczona z wierzchołka A może mieć długość:

☐ $\frac{\sqrt{2}}{3}$?
☐ $\sqrt{2}$?
☐ $2\sqrt{2}$?

18. Jeśli liczba $n > 1$ jest nieparzysta, to liczba $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ w rozkładzie na czynniki pierwsze:

☐ ma zawsze conajmniej 7 dwójek.
☐ ma zawsze dokładnie 7 dwójek.
☐ może mieć dokładnie 8 dwójek.

19*. Na szachownicy 8×8 można ustawić w pozycjach niebijących:

☐ 15 gońców.
☐ 8 wież.
☐ 33 pionki jednego koloru.

20. Nadbor chce ustawić w rządku 666 swoich gumowych lalek, z czego 222 to misie a 444 to ptysie. Może to zrobić:

- [ ] na $\binom{666}{111}$ sposobów.
- [ ] tak, aby w 60 miejscach miś stał bezpośrednio za ptysiem.
- [ ] tak, aby bezpośrednio za każdym misiem stał ptyś.

21. Romek, Andrzej i Jarek bawią się w piaskownicy zabawkami. Gdyby Romek zabrał Andrzejowi połowę jego zabawek, to miałby ich dwa razy mniej niż Jarek. Gdyby Andrzej zabrał wszystkie zabawki Romkowi, to miałby ich o 10 mniej niż Jarek. A gdyby zgodnie ze swoim planem Jarek zabrał wszystkie zabawki z piaskownicy, to miałby ich w sumie 110.

- [ ] Romek ma mniej niż 15 zabawek.
- [ ] Jarek i Romek mają ponad dwa razy więcej zabawek niż Andrzej.
- [ ] Jarek ma ponad połowę zabawek z piaskownicy

22. Trójkąt o polu 1 ma boki o długościach a, b, c, przy czym $a \geqslant b \geqslant c$. Czy b może być równe:

- [ ] $\frac{2\pi-1}{4}$
- [ ] $\frac{\pi^2}{6}$
- [ ] 541

23*. Wśrod liczb $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots$ jest nieskończenie wiele liczb:

- [ ] mających nieparzystą liczbę cyfr z zapisie dziesiętnym.
- [ ] rozpoczynających się cyfrą nieparzystą.
- [ ] kończących się dwoma cyfrąmi nieparzystymi.

24. Maciuś napisał bardzo dużą liczbę całkowitą n i przemnożył ją przez 5 uzyskując wynik składający się z 60 cyfr, przy czym jest to 40 piątek i 20 siódemek. Jeśli $S(x)$ jest sumą cyfr liczby x, to

- [ ] $S(S(S(n))) = 7$.
- [ ] $S(n) = 130$.
- [ ] $S(n) = 140$.

25. Istnieje taki wielomian $W(n)$ stopnia 2006, że:

- ☐ $W(1) = W(2) = W(3) = \ldots = W(2006) = 1$, $W(2007) = 2007$.
- ☐ $W(1) = W(2) = W(3) = \ldots = W(2005) = 1$, $W(2006) = 2$, $W(2007) = 2007$.
- ☐ $W(i) = i$ dla i od 1 do 2007.

26. Liczba $11 \cdot 13^2 \cdot 15^3 \cdot 17^4 \cdot 19^5$ ma:

- ☐ 720 dzielników.
- ☐ 6! dzielników.
- ☐ ponad 2006 dzielników.

27. Onufry i Joasia grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą aż uzyskają ciąg ORR lub OOR (O-orzeł, R-reszka). W przypadku pierwszego wygrywa Onufry, w przypadku drugiego - Joasia.

- ☐ Joasia ma większą szansę na wygraną.
- ☐ Joasia zawsze wygra.
- ☐ Joasia wygra z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$.

28*. Czy długości boków trójkąta prostokątnego mogą być

- ☐ wszystkie liczbami pierwszymi.
- ☐ kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- ☐ liczbami całkowitymi oraz kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, przy czym najkrótszy bok ma długość niepodzielną przez 3.

29. Ciąg a_i spełnia zależność $a_i = 4i+1$. Czy wielomian o współczynnikach całkowitych, taki, że $W(i) = a_i$ dla i od 1 do n:

- ☐ ma zawsze 3 pierwiastki całkowite?
- ☐ ma conajmniej jeden pierwiastek całkowity?
- ☐ nie ma pierwiastków całkowitych dla n pierwszych?

30. W bandzie zbójników lorda Saicama niektórzy zbójnicy machają mieczem, niektórzy toporem a niektórzy nauczają języka polskiego (przy czym mogą robić po kilka rzeczy naraz). W sumie w bandzie jest 227 zbójników. Machając mieczem nie uczy się polskiego. Pewną broń w ręku dzierży 127 zbójników. 67 ma topór i nie ma miecza. W sumie machających mieczem i uczących polskiego jest 160 zbójników.

- ☐ polonistów machających toporem i mieczem jest ponad 11.
- ☐ co najwyżej 4! polonistów macha toporem.
- ☐ możliwe, że 27 zbójników macha i mieczem i toporem.