

## Teoria liczb - najstarsi

0. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania  $y^3 = x^2 - 1$ .
1. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania  $y^3 = x^2 + 1$ .
2. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania  $y^3 = x^2 + 2$ .
3. Pokazać, że równanie  $x^2 + y^2 = 3xy - 1$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y$ .
4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów o wszystkich bokach długości całkowitej, jednym kącie miary  $120^\circ$  i bokach obok tego kąta różniących się długością o 1.
5. Znaleźć najmniejszą liczbę nieparzystą  $n$  taką, że istnieje kwadrat liczby naturalnej będący zarazem sumą  $n$  kwadratów kolejnych liczb naturalnych.
6. Niech  $\sigma(a)$  będzie najmniejszą taką liczbą dodatnią taką, że  $a^\sigma(a) \equiv 1 \pmod{p}$  dla  $p$  pierwszego, nieparzystego, nie dzielącego  $a$  ( $a \in \{1, \dots, (p-1)\}$ ). Dla każdego  $k$  znaleźć liczbę takich  $a$ , że  $\sigma(a) = k$ .
7. Znaleźć liczbę takich  $x \in \{1, 2, \dots, 2500\}$  takich, że  $2501|x^{11} - 2$ .