KÓŁECZKO Z TEORII LICZB (13.12.06)

1. TEORIA

1.1. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest określony następująco: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

1.2. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = NWD(a, b)$.

1.3. Małe twierdzenie Fermata: Niech p będzie liczbą pierwszą, $n \in \mathbb{N}, p$ nie dzieli n. Wtedy zachodzi: $n^p \equiv n \; mod \; p$ (inna wersja: $n^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p$).

1.4. Tw. Wilsona: $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy gdy $(n-1)! \equiv -1 \; mod \; n$.

1.5. Chińskie twierdzenie o resztach: Niech $n_1, n_2, \ldots n_k, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}, n_i \perp n_j$ dla $i \neq j$. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba $a \in 0, 1, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_k - 1$ taka, że $a \equiv a_i \; mod \; n_i$.

2.ZADANKA

2.1. Udowodnić, że:

- $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$
- $n|m \Rightarrow F_n|F_m$

2.2. Udowodnij, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą dwójki.

2.3. Udowodnij, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

2.4. Znajdź wszystkie n, dla których $n! + 3$ jest kwadratem liczby naturalnej.

2.5. Udowodnij, że jeśli $p|a^p - b^p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, to również $p^2|a^p - b^p$.

2.6. Niech p_n będzie ciągiem liczb pierwszych $(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots)$. Udowodnić, że $(\Pi_{i=1}^{n} p_i) \pm 1$, dla żadnego n, nie jest kwadratem liczby naturalnej.

2.7. Udowodnić, że nie istnieje taka para liczb naturalnych $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, takich, żeby $2^n - 1$ było k-tą potęgą liczby całkowitej.

2.8. Liczbę nazywamy k-elfiastą jeśli jest niepodzielna przez żadną liczbę postaci a^k. Udowodnić, że dla dowolnego k, dwie kolejne liczby k-elfiaste mogą być oddalone od siebie o dowolnie dużo.