....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na VIII Warsztaty Matematyczne

Klasa pierwsza

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnic.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: −**1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi badź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. O liczbach x, y wiemy, że $3^x = 18$ oraz $18^y = 243$. Wówczas:

- ☐ $xy = 3\sqrt{2}$.
- ☐ $xy = 5$.
- ☐ $xy < 2\pi$

2. Suma trzech liczb pierwszych

- ☐ może być liczbą pierwszą.
- ☐ może być liczbą parzystą.
- ☐ musi być podzielna przez 3.

3*. Sześciokąt wypukły może mieć:

- ☐ 3 kąty proste.
- ☐ 4 kąty proste.
- ☐ 3 kąty ostre.

4. Liczba „dziewięćdziesiąt dziewięć tysięcy dziewięć” to:

☐ 99009.
☐ 93009.
☐ 99009.

5. Prostokąt $EFGD$ powstał z prostokąta $ABCD$ przez obrót wokół wierzchołka D, przy czym obrazem punktu A jest punkt E, punktu B punkt F, a punktu C punkt G. Punkt H jest punktem przecięcia odcinków BC i EF. Wiadomo, że $AD = 8, AB = 12, BH = 7$. Wówczas pole pięciokąta $ABHED$

☐ jest równe 54.
☐ jest większe niż czworokąta $HCDE$.
☐ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

6. W przestrzeni dane są trzy parami nierównoległe i nieprzecinające się proste. Możliwych prostych mających z każdą z nich co najmniej jeden punkt wspólny jest:

☐ zawsze 0.
☐ zawsze nieskończenie wiele.
☐ zależnie od wyboru prostych.

7. Dane jest 2007 parami różnych liczb całkowitych. Wówczas na pewno:

☐ są wśród nich dwie, których suma jest podzielna przez 2007.
☐ są wśród nich dwie, których różnica jest podzielna przez 2007.
☐ są wśród nich dwie, których różnica jest podzielna przez 2007 lub są dwie, których iloczyn jest podzielny przez 2007.

8*. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$

☐ nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.
☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych.
☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych

9. Liczba równoległoboków, których wierzchołkami są wierzchołki 24-kąta foremnego jest:

- ☐ większa niż 100.
- ☐ mniejsza od 157.
- ☐ równa 66.

10. Suma kątów przy wierzchołkach gwiazdy $ACEGBDF$ wynosi zawsze:
(rysunek gwiazdy siedmioramiennej w której siedmiokąt $ABCDEFG$ jest wypukły)

- ☐ $360°$.
- ☐ $630°$.
- ☐ $720°$.

11*. Niech $n = \overline{ABCDEF}$ będzie taką liczbą sześciocyfrową, że $A + D = B + E = C + F = 9$. Wówczas n jest podzielna przez:

- ☐ 9.
- ☐ 13.
- ☐ 37.

12. Onufry i Joasia grają w zapałki. Na początku na stole jest n zapałek. W każdym ruchu każde z nich musi zabrać ze stołu jedną lub dwie zapałki. Joasia zaczyna, przegrywa ten, kto już nie może podnieść zapałki. Joasia ma strategię wygrywającą dla:

- ☐ $n = 101$.
- ☐ $n = 125$.
- ☐ $n = 234$.

13. Liczba p jest pierwsza i większa od 2007. Wówczas liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez:

- ☐ 2.
- ☐ 12.
- ☐ 24.

14. Jarek, Jędrek i Romek bawili się w piaskownicy. Każdy z nich albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Jeden z nich ma łopatkę. W pewnym momencie powiedzieli nastepujące zdania:

Jarek: Właściciel łopatki zawsze kłamie.

Jędrek: Jarek zawsze mówi prawdę.

Romek: Jędrek nie ma łopatki.

Kto może mieć łopatkę?

- [ ] Jarek
- [ ] Jędrek
- [ ] Romek

15. Wyrażenie $2a^2 + b^4 + 1 - 4ab$

- [ ] jest zawsze dodatnie.
- [ ] może być równe 1.
- [ ] jest zawsze większe od -1.

16*. Liczba $6^{99} + 8^{99}$

- [ ] jest podzielna przez 4.
- [ ] jest podzielna przez 7.
- [ ] jest podzielna przez 49.

17. Klockiem nazywamy prostokąt 3×1 z doczepionym kwadracikiem 1×1 pośrodku dłuższego boku. Takim klockiem da się pokryć kwadrat:

- [ ] 4×4.
- [ ] 5×5.
- [ ] 10×10.

18. Maciek napisał na kartce:

`TATA BOKSUJE INTROLIGATORA`

Następnie przesunął w każdym wyrazie ostatnią literę na początek otrzymując:

`ATAT EBOKSUJ AINTROLIGATOR`

I następnie znów przesunął, i znów itd. Liczba przesunięć aż do pierwszego uzyskania pierwotnego tekstu:

- ☐ jest większa od 200.
- ☐ jest równa 2007.
- ☐ jest równa 364.

19. Ustawiamy na szachownicy figury szachowe tak, aby się nie biły. Można umieścić 8 figur, jeśli szachownica ma kształt

- ☐ kwadratu 4×4 a ustawiamy skoczki.
- ☐ kwadratu 8×8 z wyciętymi rogami a ustawiamy wieże.
- ☐ wszystkich czarnych pól szachownicy 8×8 a ustawiamy gońce.

20*. Nadbor postanowił w wierzchołki n-kąta foremnego wpisać niezerowe liczby całkowite tak, by dla każdego wierzchołka liczba wpisana weń była sumą liczb wpisanych w sąsiednie wierzchołki. Może to zrobić dla:

- ☐ $n = 4$.
- ☐ $n = 5$.
- ☐ $n = 6$.

21. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c sumują się do 0. Wówczas:

- ☐ $ab + bc + ac$ jest niedodatnie.
- ☐ możliwe, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.
- ☐ abc jest dodatnie.

22. W zapisie dziesiętnym liczby 100! zerami są cyfry na pozycjach licząc od prawej:

- ☐ $5, 10, 15$.
- ☐ $15, 20, 25$.
- ☐ $2, 4, 8$.

23*. Która z poniższych liczb jest kwadratem liczby całkowitej:

- ☐ 65894365876432856387465984375982368756387426587236587364856387456874365
- ☐ 73!
- ☐ 123321123321

24. W trójkącie ABC długość wysokości spuszczonej z wierzchołka C jest dwa razy mniejsza niż długość boku AB. Miara kąta $\angle ACB$ może być równa:

- ☐ $10°$.
- ☐ $90°$.
- ☐ $100°$.

25. Dla liczb rzeczywistych x, y, z zbiory $\{x, y, z\}$ i $\{2x + y, 2y + z, 2z + x\}$ są równe. Wówczas:

- ☐ $x + y + z = 0$.
- ☐ możliwe, że $xyz = 0$.
- ☐ $x^2 + y^2 + z^2$ jest zawsze dodatnie.

26. Liczba dzielników liczby $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

- ☐ jest większa niż 700.
- ☐ jest mniejsza niż 500.
- ☐ jest parzysta.

27. Liczby a, b spełniają warunek:

$$\frac{a+b}{19a+94b} = \frac{1}{25}$$

Wówczas $\frac{a}{b}$:

- ☐ może przyjmować więcej niż jedną wartość.
- ☐ jest równe $11,5$.
- ☐ jest równe $12,5$.

28*. Dany jest kwadrat o boku całkowitej długości a. Podzielono go na 36 kwadracików, z których 35 ma bok 1. Wówczas na pewno:

- ☐ $a = 6$.
- ☐ 3 dzieli a.
- ☐ pozostały kwadracik ma bok długości całkowitej.

29. Okrąg może mieć z powierzchnią czworościanu:

- [ ] 7 punktów wspólnych.
- [ ] 8 punktów wspólnych.
- [ ] 9 punktów wspólnych.

30. Dziewięć punktów ułożono w kwadrat 3×3. Liczba możliwych niezdegenerowanych trójkątów o wierzchołkach w tych punktach jest

- [ ] równa 78.
- [ ] mniejsza niż 80.
- [ ] większa niż 76.