KÓŁKO - SYMEDIANY I WSTĘP DO BIEGUNOWYCH - 2.04.2008

TEORIA

Symediana w trójkącie to odbicie jego środkowej względem dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka.

Niech D należy do boku BC trójkąta ABC. Wtedy AD jest symedianą w tym trójkącie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{BD}{CD} = (\frac{AB}{AC})^2$.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Wtedy AC jest symedianą w trójkącie ABD wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie stycznych do tego okręgu w punktach B i D leży na prostej AC oraz wtedy i tylko wtedy gdy $AC \cdot BD = AB \cdot CD$

1.0. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Wykazać, że AC jest symedianą w trójkącie ABD wtedy i tylko wtedy gdy BD jest symedianą w trójkącie BAC.

1.1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym wpisanym w okrąg o, zaś a, b, c, d niech będą prostymi stycznymi do okręgu o w punktach odpowiednio A, B, C, D. Udowodnić, że proste AC, b, d przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy proste BD, a, c przecinają się w jednym punkcie.

1.2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkt M jest środkiem odcinka AC. Wykazać, że $\angle AMB = \angle AMD$ wtedy i tylko wtedy, gdu BD jest symedianą w trójkącie ABC.

1.3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC oraz $\angle PAB = \angle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

1.4. Proste AB i AC są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C, prosta przchodząca przez punkt A przecina okrąg o w punktach P i Q, a cięciwę BC w punkcie D. Wykazać, że $\frac{PA}{PD} = \frac{QA}{QD}$.

1.5. Punkt L leży na boku AB trójkąta ABC, przy czym prosta CL jest symedianą trójkąta ABC. Punkt K leży na odcinku CL. Proste AK i BK przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Proste DE i AB przecinają się w punkcie P. Wykazać, że prosta CP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

O symedianach mało można znaleźć w literaturze, za to o biegunowych znajdziemy sporo cytatów. Poniżej przykład dokształcania dzieci - niestety biegunowa została błednie nazwana biegunem:

"Krzyś przypatrzył się dobrze drewienku. -To biegun od mojego drewnianego konia z odłamana nogą - zawołał - poznaje! - A po chwili rzekł uroczyście: - Puchatku, Wyprawa jest zakończona. Znalazłeś Biegun Północny."

Nie wiem, co to biegunowa północna. Literatura matematyczna milczy na ten temat.