Główne średnia teoria liczb

wtorek, 28 marca 2006 roku

1. Pokazać, że funkcja $f(n) = n^{\tau(n)}$ jest różnowartościowa. Przy czym $\tau(n)$ jest liczbą dodatnich dzielników n.

2. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą i $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Pokazać, że n dzieli $2^n - 2$.

3. Wiemy, że dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geqslant 1 + xy$. Udowodnić, że $x^{2m} + y^{2m} \geqslant \frac{2}{3^m}$.

4. Znaleźć resztę z dzielenia 6^{2001} przez 1000.

5. Dowieść, że dla każdego wielomianu całkowitoliczbowego $P(x) = x^2 + px + q$, istnieje taki wielomian całkowitoliczbowy $W(x) = 2x^2 + rx + s$, że zbiory wartości tych wielomianów w punktach całkowitych są rozłączne.

6. Dla liczb $x, y, z \in \mathbb{R}+$, spełniających warunek: $x + y + z = 3$, pokazać, że

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant xy + yz + zy$$

.