Przedfinałowe pałowanie na sinusach

15.04.2009

1. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Styczna do ω w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Prosta prostopadła do BC w punkcie B przecina symetralną odcinka AB w E, natomiast prosta prostopadła do BC w punkcie C przecina symetralną odcinka AC w punkcie F. Pokazać, że punkty D, E i F są współliniowe.

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa AC tego okręgu przechodzi przez środek odcinka OB. Proste OC i AB przecinają się w punkcie P, zaś proste OA i BC przecinają się w punkcie Q. Udowodnić, że $PC = AQ$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a ponadto:

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad CD = c, \qquad \angle ABC = 120\ , \qquad \angle ABD = 30\ .$$

Wykazać, że $c \geqslant a + b$ oraz $|\sqrt{c+a} \quad \sqrt{c+b}| = \sqrt{c \quad a \quad b}$.

4. Dwa okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta O_1A przecina okrąg ω_2 w punktach A i D ($A \neq D$), a prosta O_2A przecina okrąg ω_1 w punktach A i C ($A \neq C$). Prosta równoległa do CD przechodząca przez B przecina okrąg ω_1 w punkcie E, a okrąg ω_2 – w F ($E \neq B \neq F$). Dowieść, że $EF = CB + BD$.