Prosta rosyjska olimpiada

1. Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $a \neq b$ i $c \neq 1$. Wiemy, że równania $x^2 + ax + 1 = 0$ i $x^2 + bx + c = 0$ mają wspólny pierwiastek oraz równania $x^2 + x + a = 0$ i $x^2 + cx + b = 0$ mają też wspólny pierwiastek. Znajdź sumę $a + b + c$.

2. Niech AA' i CC' będą wysokościami w trójkącie ostrokątnym ABC. Dwusieczna kąta ostrego między tymi wysokościami przecina boki AB i BC w punktach P i Q. Niech H będzie ortocentrum tego trójkąta, a M środkiem boku AC. Niech R będzie przecięciem prostej HM i dwusiecznej kąta ABC. Udowodnij, że na czworokącie $PBQR$ da się opisać okrąg.

3. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geqslant 3f(x + 2y + 3z)$$

4. Punkt P leży na płaszczyźnie, an której jest także trójkąt równoboczny ABC. Wiem, że $PA = 2$ i PB=3. Jaką maksymalną długość może mieć odcinek PC?

5. Na tablicy napisanych jest w rzędzie 2^n liczb równych 1 lub -1. W jednym ruchu zastępujemy każdą z liczb a_i liczbą $a_i a_{i+1}$, gdzie $a_{2^n+1} = a_1$. Pokazać, że po skończonej liczbie ruchów wszystkie liczby na tablicy będą dodatnie.

6. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 mają środki odpowiednio w punktach A, B, C, D i promienie r_1, r_2, r_3, r_4 przy czym $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$. Pokazać, że zewnętrzne styczne par okręgów o_1,o_3 oraz o_2,o_4 wycinają z płaszczyzny czworokąt opisywalny na okręgu.

7. Pokazać, że jeśli $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$ i $(c_1, c_2, \ldots)$ to nieskończone ciągi liczb całkowitych dodatnich, to istnieją liczby całkowite dodatnie p, q, że $a_p \geqslant a_q, b_p \geqslant b_q, c_p \geqslant c_q$.

8. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Rozważamy wszystkie pary liczb względnie pierwszych p, q, takie, że: $0 < p < q \leqslant n, p + q > n$. Pokazać, że suma liczb $\frac{1}{pq}$ dla wszystkich takich par jest równa $\frac{1}{2}$.