Różne

1. Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_6$, których suma równa jest 6. Znaleźć maksymalną wartość wyrażenia:

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6 + a_5a_6a_1 + a_6a_1a_2$$

2. Pokazać, że średnia arytmetyczna najmniejszych elementów wszystkich możliwych r-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi $\frac{n+1}{r+1}$.

3. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ obrano na przekątnych AC i CE punkty M i N takie, że $\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{NE} = r$. Wiedząc, że punkty B, M, N są współliniowe, znaleźć r.

4. Niech $ABCDEF$ będzie wypunkłym sześciokątem w którym $AB = BC = CD$ oraz $DE = EF = FA$ oraz $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Punkty G i H leżą wewnątrz sześciokąta oraz $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Pokazać, że $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.

5. BC jest średnicą okręgu o środku w O. A jest dowolnym punktem na okręgu takim, że $\angle AOC > 60°$. EF jest cięciwą zawartą w symetralnej odcinka AO. D jest środkiem krótszego łuku AB. Prosta przechodząca przez O, równoległa do AD, przecina prostą AC w J. Pokazać, że J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CEF.

6. Okręgi C_1 i C_2 leżą wewnątrz okręgu C i są do niego styczne odpowiednio w punktam M i N, zaś C_1 przechodzi przez środek C_2. Przedłużenie wspólnej cięciwy C_1 i C_2 przecina C w punktach A i B. Proste MA i MB przecinają C_1 jeszcze w E i F (oprócz M). Pokazać, że EF jest styczne do C_1.

7. Znaleźć maksymalne takie x_0 dla którego istnieje ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$, taki, że $x_0 = x_{1995}$ oraz spełniający warunek:

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

dla każdego $i \in 1, 2, \ldots, 1995$.