Resztki z Warsztatów, czyli nietrudne nierówności

12.11.2009

1. Znaleźć największą liczbę rzeczywistą   spełniającą dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $n,\ k$ nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{k}} > \quad .$$

2. Iloczyn liczb rzeczywistych $a,\ b,\ c$ równy jest   1. Udowodnić nierówność:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 3(a+b+c) \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b}.$$

3. Pokazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych $x,\ \ ,y,\ z$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{1 \quad x} + \sqrt{4 \quad y + x} + \sqrt{9 \quad z + y} + \sqrt{16 + z} \leqslant 10.$$

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P, Q i R to rzuty punktu D na proste odpowiednio BC, CA i AB. Wykazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na prostej AC.