KÓŁECZKO Z TEORII LICZB (24.10.2007)

1. TEORIA

1.0. Jeśli istnieje x takie, że $ax = b$, to mówimy, że $a|b$ (a dzieli b).

Liczba pierwsza p to liczba naturalna większa od 1, której jedynymi dzielnikami jest 1 i ona sama ($x|p \Rightarrow (x = 1$ lub $x = p)$).

1.1. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest określony następująco: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

1.2. NWD i NWW

Przez $NWD(a, b)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a i b ($NWD(a, b)|a$, $NWD(a, b)|b$ oraz dla każdego x całkowitego zachodzi $(x|a \wedge x|b) \Rightarrow x|NWD(a, b)$).

Przez $NWW(a, b)$ oznaczamy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb całowitych a i b ($NWW(a, b) \geqslant 0$, $a|NWW(a, b)$, $b|NWW(a, b)$ oraz dla każego x naturalnego zachodzi $(a|x \wedge b|x) \Rightarrow NWW(a, b)|x$).

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = NWD(a, b)$.

Jeśli $NWD(a, b) = 1$, to mówimy, że $a \perp b$ (a jest względnie pierwsze z b).

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = ab$.

1.3. Zapis $a \equiv b \ mod \ n$ oznacza, że $n|a - b$.

1.4. Małe twierdzenie Fermata Niech p będzie liczbą pierwszą, $n \in \mathbb{N}, p$ nie dzieli n. Wtedy zachodzi: $n^p \equiv n \ mod \ p$ (inna wersja: $n^{p-1} \equiv 1 \ mod \ p$).

1.5. Tw. Wilsona Liczba naturalna n większa od 2 jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy gdy $(n - 1)! \equiv -1 \ mod \ n$.

2.ZADANKA

2.0. Udowodnić, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

2.1. Udowodnić, że:

- $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$
- $n|m \Rightarrow F_n|F_{n+1}$

2.2. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $p|a^p - b^p \Rightarrow p^2|a^p - b^p$.

2.3. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ będą parami różnymi resztami modulo p, analogicznie $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$. Wykaż, że istnieją różne k i l, takie że $a_k b_k \equiv a_l b_l \ (mod \ p)$.

2.4. Liczba Grabowskiego to liczba, której zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1. Udowodnij, że jeśli $NWD(n, 10) = 1$, to istnieje liczba Grabowskiego podzielna przez n.

2.5. Liczby całkowite x, y, z spełniają warunek $7|x^3 + y^3 + z^3$. Udowodnij, że $7|xyz$.