Potęga punktu

19.11.2008

1. Punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC. Punkty D i E należą odpowiednio do boków AB i AC. Wiadomo, że $\angle ABP = \angle DPA$ oraz $\angle ACP = \angle EPA$. Wykazać, że na czworokącie $EDBC$ można opisać okrąg.

2. Okrąg ω jest styczny do prostej k w punkcie D. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do prostej k, a punkt C należy do k i nie pokrywa się z D. Proste AC i BC przecinają okrąg ω po raz drugi odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że prosta EF przechodzi przez środek CD.

3. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie. Prosta k jest styczna do ω_1 w A i do ω_2 w B, przy czym $A \neq B$. Odcinek AC jest średnicą ω_1, a prosta CE jest styczna do ω_2 w punkcie E. Pokazać, że $CE = AC$.

4. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia warunki: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E i A, przecinają się w jednym punkcie.

5. Dany jest odcinek AB. Na symetralnej AB wybieramy punkt X. Okrąg ω_1 jest wpisany w ABX, natomiast okrąg ω_2 – dopisany do trójkąta ABX (styczny do odcinka AB). Udowodnić, że iloczyn długości promieni okręgów ω_1 i ω_2 nie zależy od wyboru punktu X.

6. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.