Potęga punktu

1. Dany jest odcinek AB. Obieramy dowolny punkt X na symetralnej AB, wpisujemy okrąg w trójkąt ABX oraz dopisujemy doń okrąg styczny do odcinka AB. Okręgi te mają promienie r i R. Pokazać, że iloczyn rR jest stały.

2. Na prostej k dany jest odcinek AB oraz punkt X na nim. Rysujemy dowolny okrąg ω styczny do k w X i obieramy na nim punkty P i R, takie, że $\angle APB = \angle ARB$. Pokazać, że przecięcie prostej PR z prostą k jest niezależne od wyboru okręgów i punktów P i R na nich.

3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

4. Niech o_1, o_2 będą okręgami rozłącznymi. Proste k, l, m, n są ich wspólnymi stycznymi. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą środkami odcinków pomiędzy punktami styczności k, l, m, n z okręgami. Pokazać, że punkty te leżą na jednej prostej.

5. Okrąg ω styczny jest do prostej k w punkcie A. Punkty B i C leżą na ω oraz $BC \| k$. Punkt P jest dowolnym punktem prostej k różnym od A. Prosta BP przecina ponownie ω w K, zaś prosta CP w L. Pokazać, że prosta KL połowi odcinek AP.

6. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ w którym $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Pokazać, że przedłużenia wysokości trójkątów FAB,BCD,DEF poprowadzone odpowiednio z punktów A, C, E przecinają się w jednym punkcie.

7. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach X, Y, zaś ich wspólna styczna to k. Okrąg o_3 jest styczny zewnętrznie do o_1,o_2 i leży w całości po tej samej stronie k co o_1 i o_2. Prosta l różna od k jest styczna do o_3 w Z i równoległa do k, zaś o_1, o_2, o_3 leżą w całości po tej samej jej stronie. Pokazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

8. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach A i B zaś M jest środkiem odcinka AB. Prosta k jest styczna do ω_1 w P i do ω_2 w R, zaś N jest środkiem odcinka PR. Pokazać, że zachodzi $2MN \geqslant PR$.