**Potęga punktu**

**1.** Dany jest odcinek $AB$. Obieramy dowolny punkt $X$ na symetralnej $AB$, wpisujemy okrąg w trójkąt $ABX$ oraz dopisujemy doń okrąg styczny do odcinka $AB$. Okręgi te mają promienie $r$ i $R$. Pokazać, że iloczyn $rR$ jest stały.

**2.** Na prostej $k$ dany jest odcinek $AB$ oraz punkt $X$ na nim. Rysujemy dowolny okrąg $\omega$ styczny do $k$ w $X$ i obieramy na nim punkty $P$ i $R$, takie, że $\angle APB = \angle ARB$. Pokazać, że przecięcie prostej $PR$ z prostą $k$ jest niezależne od wyboru okręgów i punktów $P$ i $R$ na nich.

**3.** Trzy różne punkty $A, B, C$ leżą na okręgu $o$. Proste styczne do okręgu o w punktach $A$ i $B$ przecinają się w punkcie $P$. Prosta styczna do okręgu $o$ w punkcie $C$ przecina prostą $AB$ w punkcie $Q$. Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

**4.** Niech $o_1, o_2$ będą okręgami rozłącznymi. Proste $k, l, m, n$ są ich wspólnymi stycznymi. Niech $X_1, X_2, X_3, X_4$ będą środkami odcinków pomiędzy punktami styczności $k, l, m, n$ z okręgami. Pokazać, że punkty te leżą na jednej prostej.

**5.** Okręgi $o_1, o_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Prosta $k$ jest styczna do obu okręgów w punktach odpowiednio $C$ i $D$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $CD$. Niech $E$ będzie punktem symetrycznym do $B$ względem $M$. Niech $o_3, o_4$ będą okręgami mającymi za średnice odpowiednio odcinki $AE$ i $CD$, przecinające się w punktach $X_1, X_2$. Udowodnić, że $X_1X_2$ jest średnicą okręgu $o_4$.

**6.** Okrąg $\omega$ styczny jest do prostej $k$ w punkcie $A$. Punkty $B$ i $C$ leżą na $\omega$ oraz $BC \| k$. Punkt $P$ jest dowolnym punktem prostej $k$ różnym od $A$. Prosta $BP$ przecina ponownie $\omega$ w $K$, zaś prosta $CP$ w $L$. Pokazać, że prosta $KL$ połowi odcinek $AP$.

**7.** Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ w którym $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Pokazać, że przedłużenia wysokości trójkątów $FAB$,$BCD$,$DEF$ poprowadzone odpowiednio z punktów $A, C, E$ przecinają się w jednym punkcie.

**8.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ przecinają się w punktach $X, Y$, zaś ich wspólna styczna to $k$. Okrąg $o_3$ jest styczny zewnętrznie do $o_1$,$o_2$ i leży w całości po tej samej stronie $k$ co $o_1$ i $o_2$. Prosta $l$ różna od $k$ jest styczna do $o_3$ w $Z$ i równoległa do $k$, zaś $o_1, o_2, o_3$ leżą w całości po tej samej jej stronie. Pokazać, że punkty $X, Y, Z$ są współliniowe.

**9.** Okręgi $\omega_1$ i $\omega_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$ zaś $M$ jest środkiem odcinka $AB$. Prosta $k$ jest styczna do $\omega_1$ w $P$ i do $\omega_2$ w $R$, zaś $N$ jest środkiem odcinka $PR$. Pokazać, że zachodzi $2MN \geqslant PR$.

**10.** Pokazać, że punkt $P$ leży na wysokości spuszczoznej z wierzchołka $A$ trójkąta $ABC$ lub na jej przedłużeniu wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzuty na proste $AB$ i $AC$ oraz punkty $B$ i $C$ leżą na jednym okręgu.

**11.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ jest styczny do boków $AC$ i $BC$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Punkt $F$ jest rzutem prostokątnym punktu $A$ na prosta $BC$. Punkt $K$ jest symetryczny do punktu $F$ względem prostej $DE$. Dowieść, ze punkt $K$ leży na dwusiecznej kąta $BAC$.