Zajęcia na międzyszkolne kółko - wielomiany a kombinatoryka (szkic)

Na zajęciach z kombinatoryki poznaliście techniki rozwiązywania problemów kombinatorycznych przy pomocy "bajeczek" - na pewne wyrażenie patrzyło się jako na liczbę możliwych układów czegoś, następnie to samo coś liczyło się na inny sposób i otrzymywało równość dwóch wyrażeń kombinatorycznych. Zaletą tej techniki jest jej intuicyjność - wiadomo, dlaczego działa, skąd się bierze, jest zrozumiałe, skąd wynika otrzymana na końcu równość. Ma ona jednak też dwie wady. Pierwszą jest łatwość popełnienia pomyłki - policzenia jakiegoś układu dwa razy, nie policzenia jakiegoś. Przy rozwiązaniach kombinatorycznych zawsze trzeba sprawdzić otrzymany wynik na małych przypadkach, by zobaczyć, czy nie popełniło się błędu. Drugą wadą jest trudność zapisu - dobre, formalne przekazanie rozwiązania kombinatorycznego to zazwyczaj niełatwa i czasochłonna sprawa.

Dziś poznamy inną technikę rozwiązywania zadań kombinatorycznych - technikę wielomianową. Nie ma ona dwóch wymienionych wad rozwiązań "bajeczkami" - jest bowiem sformalizowany, a więc prosty w zapisie i chroniący przed błędami. Jest - przynajmniej na początku - mniej intuicyjna i trochę trudniejsza w stosowaniu. Należy ją traktować jako dodatkowe narzędzie przy rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych - bardzo pomocne, ale nie jedyne. Trzeba bowiem pamiętać, że zadania kombinatoryczne zazwyczaj nie pojawiają się pod postacią wyrażeń, które należy uprościć, ale mają pewną fabułę, i pewne otrzaskanie z "bajeczkami" jest konieczne choćby po to, by z tej fabuły dojść do wyrażenia, do którego można zastosować technikę wielomianową.

Podstawowym narzędziem którego będziemy używać jest *wzór dwumienny Newtona*. Mówi on, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi równość

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Spróbujmy zobaczyć, czemu tak jest. Otóż wyrażenie $(a+b)^n$ to w istocie $(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ - w sumie n takich nawiasów. Po otworzeniu wszystkich dostaniemy wyrażenia będące iloczynami n liczb, po jednej z każdego nawiasu. Będą to zatem wyrażenia postaci $a^i b^{n-i}$ - w sumie liczb bowiem musi być n. Ile będzie takich wyrażeń dla konkretnego i? By uzyskać takie wyrażenie trzeba wybrać i nawiasów, z których do iloczynu wejdzie a, zaś z reszty wejdzie b. Wyboru i nawiasów spośród n możemy oczywiście dokonać na $\binom{n}{i}$ sposobów. Po połączeniu posiadanych informacji w jedną całość dostaniemy wzór dwumianowy Newtona.

Zadanie 1: Udowodnić wzór dwumianowy Newtona przy pomocy indukcji.

Dodatkowo będziemy korzystali z dwóch prostych faktów. Po pierwsze, $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, po drugie zaś, jeżeli równość $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ zachodzi dla wszystkich x (w istocie wystarcza, by zachodziła dla $n+1$ różnych liczb x), to $b_n = a_n, b_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, b_1 = a_1, b_0 = a_0$.

Zadanie 2: Udowodnić, że taki sam fakt zachodzi dla wielomianów większej liczby zmiennych, np. (dla dwóch zmiennych), że jeśli $\sum a_{i,j}x^i y^j = \sum b_{i,j}x^i y^j$ dla każdych x, y, to $a_{i,j} = b_{i,j}$ dla każdych i, j.

Wpierw udowodnijmy dwa znane fakty: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$, zaś $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$. Chcemy korzystać ze wzoru dwumianowego, w wyrażeniu $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$ chcielibyśmy, by pojawiły się wyrażenia postaci $a^i b^{n-i}$. Dopiszmy je w najprostszy możliwy sposób: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n 1^i 1^{n-i} \binom{n}{i}$, zaś to ze wzoru dwumianowego jest równe $(1+1)^n = 2^n$.

Drugiego z tych faktów dowodzi się podobnie - $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i 1^{n-i} \binom{n}{i} = (1+(-1))^n = 0^n = 0$ (tu warto zwrócić uwagę na to, że dowodzony wzór nie jest prawdziwy dla $n = 0$, bowiem wyrażenie 0^0 nie jest dobrze określone).

Nieco trudniejsze są zadania wymagające porównania współczynników przy pewnej potędze pewnego wielomianu. Spójrzmy dla przykładu na klasyczne zadanie - obliczyć $\sum \binom{n}{k}^2$ (często przedstawiane np. w postaci "na ile sposobów wieża może dojść z lewego górnego do prawego dolnego rogu szachownicy, ruszając się wyłącznie w górę i w prawo?"). Spójrzmy mianowicie na wielomian $(x+1)^{2n}$. Jaki jest współczynnik przy x^n w tym wielomianie? Ze wzoru dwumianowego otrzymujemy $(x+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} x^i \binom{2n}{n}$, zatem przy x^n stoi $\binom{2n}{n}$. Rozpiszmy jednak ten wielomian jako $(x+1)^n \cdot (x+1)^n = (\sum_{i=0}^n x^i \binom{n}{i}) \cdot (\sum_{i=0}^n x^i \binom{n}{i})$. Policzmy w otrzymanym iloczynie współczynnik przy x^n. W takim iloczynie x^n pojawia się za każdym razem, gdy mnożymy wyraz x^k z lewej strony przez x^{n-k} z prawej. Przy jednym konkretnym mnożeniu otrzymujemy współczynnik $\binom{n}{k}$ pochodzący od x^k mnożony przez $\binom{n}{n-k}$ pochodzący od x^{n-k}, czyli $\binom{n}{k}^2$ (przypomnijmy, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Współczynnik przy x^n w całym iloczynie wynosi zatem $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Wobec tego, skoro $(x+1)^{2n} = (\sum_{i=0}^n x^i \binom{n}{i}) \cdot (\sum_{i=0}^n x^i \binom{n}{i})$, to (z faktu o równości współczynników) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Dla tych, którzy zgubili się nieco w rachunkach policzmy ten przykład dla $n = 2$. Rozważamy wtedy $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, czyli współczynnik przy x^2 to $\binom{4}{2} = 6$. Z drugiej strony $(x+1)^4 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 = (x^2+2x+1)(x^2+2x+1)$. Chcemy liczyć współczynnik przy x^2. Po otworzeniu nawiasów x^2 pojawia się trzy razy - przy $x^2 \cdot 1, 2x \cdot 2x$ i $1 \cdot x^2$. Zatem współczynnik przy x^2 to $\binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = 1+4+1$. Po połączeniu posiadanych faktów otrzymujemy równość $\sum_{i=0}^2 \binom{2}{i}^2 = \binom{4}{2}$, czyli, mówiąc po ludzku, $6 = 6$.

Naturalnym pytaniem w tym momencie jest "Ale skąd, tak właściwie, wziął się ten konkretny wielomian?". Spróbuję na to pytanie przynajmniej po części odpowiedzieć. Wyrażeniem, nad którym pracujemy jest $\sum \binom{n}{k}^2$. Wpierw trzeba stwierdzić, że szukamy rozwiązania przez wielomian, a konkretnie, że będziemy próbowali $\sum \binom{n}{k}^2$ przedstawić jako współczynnik pewnego wielomianu. Pojedyncze $\binom{n}{k}$ to współczynnik przy x^k w wielomianie $(x+1)^n$. Chcielibyśmy, aby współczynnikiem pewnego wielomianu było $\sum \binom{n}{k}^2$. By otrzymać taką sumę musimy wymnożyć dwa wielomiany takie, że dla każdego k mnożąc wyrazy, przy których stoi $\binom{n}{k}$ dostajemy tę samą potęgę x. Jednym z nich jest $(x+1)^n$, drugim będzie $(1+x)^n$ - tam $\binom{n}{k}$ jest współczynnikiem przy x^{n-k}. Składamy posiadane fakty razem i dostajemy przedstawione wyżej rozwiązanie.

Oczywiście nie musi być oczywiste, że należy szukać rozwiązania poprzez współczynnik pewnego wielomianu, nie musi być też od razu jasne, że to $(x+1)^n$ będzie wielomianem, którego użyjemy. Takie intuicje przychodzą wraz z doświadczeniem. Aby nabyć go trochę więcej, zróbmy kolejne, trochę podobne zadanie. Należy mianowicie udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n zachodzi $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$. Spróbujmy zastanowić się, jaki typ wielomianu może być tu pomocny. Na pierwszy rzut oka to zadanie przypomina poprzednie - znowu rozważamy iloczyn symboli Newtona. Możnaby więc pomyśleć, że znowu należy szukać iloczynu dwóch wielomianów. Jednak w poprzednim zadaniu takie iloczyny symboli Newtona sumowaliśmy, co odpowiadało mnożeniu wielomianów. Tu takiej sumy nie mamy. Skąd zatem może pochodzić ten iloczyn?

Iloczyny takie zazwyczaj powstają przy rozważaniu potęgi sumy więcej niż dwóch składników. W tym wypadku rozważymy wielomian $(x+y+1)^n$. Przy pomocy wzoru dwumianowego można go rozpisać na dwa sposoby (tak naprawdę na więcej, ale nam się przydadzą dwa). Wpierw zapiszmy $(x+y+1)^n = (x+(y+1))^n = \sum_{m=0}^n x^m(y+1)^{n-m}\binom{n}{m}$ = (tu po raz drugi stosuje wzór dwumianowy do $(y+1)^{n-m}$) $= \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} x^m y^k \binom{n-m}{k}\binom{n}{m}$. Z drugiej strony $(x+y+1)^n = ((x+y)+1)^n = \sum_{k=0}^n (x+y)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k x^m y^{m-k}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$. W drugim rozpisaniu mamy już to, co chcemy jako współczynnik przy $x^m y^{m-k}$. W pierwszym rozpisaniu występują wyrazy $x^m y^k$, ze współczynnikami $\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}$. Po wstawieniu $m-k$ zamiast k (by uzyskać wspólczynnik przy $x^m y^{m-k}$, a nie przy $x^m y^k$) otrzymamy $\binom{n-m}{m-k}\binom{n}{m}$. Zatem z faktu o równości wspólczynników (a raczej z jego uogólnienia, które sformułowaliśmy jako zadanie 2) dostajemy podaną w zadaniu równość.

Czasami - inaczej niż we wszystkich rozpatrywanych dotychczas zadaniach - sumujemy nie po dolnym, ale po górnym wyrazie w symbolu Newtona. Spróbujmy dla przykłądu policzyć sumę $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m}$. To powinno być proste. Wiemy już, że $\binom{k}{m}$ to najczęściej współczynnik przy x^m w wyrażeniu $(x+1)^k$. Chcemy, by $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m}$ było współczynnikiem przy którejś potędze pewnego wielomianu. Narzuca się w tej sytuacji rozważenie $(x+1)^m + (x+1)^{m+1} + \ldots + (x+1)^n$ i spojrzenie na współczynnik przy x^m. Będzie to oczywiście nasza suma. Ale czy umiemy ten wielomian zapisać jakoś inaczej (najchętniej prościej)? Chwila zastanowienia pozwala zauważyć, że to, co napisaliśmy to po prostu szereg geometryczny. Suma szeregu geometrycznego $a_1, a_2, \ldots, a_i$ o ilorazie q to $a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$. W tym wypadku dostajemy $(x+1)^m \frac{(x+1)^{n-m+1}-1}{x}$. Jest to wielomian (pomimo dzielenia), bo wyraz wolny $(x+1)^{n-m+1}-1$ jest zerem, czyli ten wielomian jest podzielny przez x. Stąd możemy liczyć współczynnik przy x^m. Będzie on oczywiście (z powodu dzielenia przez x) równy współczynnikowi $(x+1)^m((x+1)^{n-m+1}-1)$ przy x^{m+1}. Ten jednak jest równy współczynnikowi $(x+1)^m(x+1)^{n-m+1}$, gdyż różnica, tj. $(x+1)^m$ jest stopnia m, a zatem ma zerowy współczynnik przy x^{m+1}. Współczynnikiem $(x+1)^m(x+1)^{n-m+1} = (x+1)^{n+1}$ przy x^{m+1} jest oczywiście $\binom{n+1}{m+1}$, skąd otrzymujemy $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Ostatnie zadanie, które rozpatrzymy wymaga użycia pochodnych. Dla tych, którzy nie wiedzą, czym jest pochodna, wystarczy informacja o tym, że pochodną wielomianu P jest wielomian oznaczany P'. Pochodna spełnia do tego następujące własności: pochodną x^n jest nx^{n-1} (w szczególności pochodna wielomianu stałego to zero), pochodną sumy dwóch wielomianów jest suma ich pochodnych, zaś pochodna iloczynu $P \cdot Q$ wyraża się wzorem $P' \cdot Q + Q' \cdot P$. Do tego, jeśli mamy dwa wielomiany P i Q i rozważymy wielomian $P(Q)$, tj. w wielomianie P w miejsce każdego x-a wstawimy wielomian Q, to pochodną otrzymanego wielomianu będzie $P'(Q) \cdot Q'$. Z powyższych warunków już wynika, że jeśli c jest liczbą rzeczywistą, zaś P wielomianem, to $(cP)' = cP'$. Jest to dobrze określona operacja, czyli jeżeli zapiszemy wielomian na dwa różne sposoby i obliczymy pochodną, to otrzymane wielomiany będą równe (dowodem tego nie będziemy się tu zajmować, choć nie jest on trudny).

Przy pomocy pochodnych udowodnimy zatem równość $\sum_{i=0}^n i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$. Rozważmy najczęściej używany przez nas wielomian, $(x+1)^n$. Zróżniczkujmy go - jeżeli przez P oznaczymi x^n, zaś przez Q - $x+1$, to nasz wielomian ma postać $P(Q)$, czyli jego pochodna to $P'(Q) \cdot Q'$. P' to nx^{n-1}, zaś Q' to 1, czyli $((x+1)^n)' = n(x+1)^{n-1}$.

Teraz wykorzystajmy wzór dwumianowy. $(x+1)^n = \sum_{i=0}^n x^i\binom{n}{i}$. Zróżniczkujmy ten wielomian. $(\sum_{i=0}^n x^i\binom{n}{i})' = \sum_{i=0}^n (x^i\binom{n}{i})' = \sum_{i=0}^n (x^i)'\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n ix^{i-1}\binom{n}{i}$. Otrzymujemy zatem równość $\sum_{i=0}^n ix^{i-1}\binom{n}{i} = n(x+1)^{n-1}$. Wstawmy do niej $x=1$, a otrzymamy $\sum_{i=0}^n i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$, czyli dowodzoną równość.

Spróbujmy jeszcze podsumować, tzn. przypomnieć sobie, jakie wyrażenia kombinatoryczne zazwyczaj powodują pojawienie się jakich wielomianów. Sumy pojedynczych symboli Newtona to najczęściej po prostu wzór dwumianowy, w którym za obydwie liczby coś podstawiliśmy. Może się tam też pojawić c^k, gdzie k to indeks sumowania - wtedy za jedną z liczb zapewne podstawiliśmy c. Sumy iloczynów symboli Newtona najczęściej wymagają zbadania współczynnika przy pewnej potędze iloczynu dwóch wielomianów. Iloczyn symboli Newtona (bez sumy) to zazwyczaj porównywanie współczynników przy wyrażeniach typu $(a+b+c)^n$, gdzie za c jest podstawiona konkretna stała. Jeżeli za coś we wzorze dwumianowym chcielibyśmy podstawić stałą, ale nie mamy wskazówek jaką, to prawie zawsze podstawiamy jedynkę. Sumowanie po górnym polu symbolu Newtona zazwyczaj wymaga użycia wzoru na sumę szeregu geometrycznego (czasami, gdy otrzymany wzór nie wygląda na wielomian, można przez mianownik pomnożyć stronami, co niekiedy trochę upraszcza rachunki). Pojawienie się wyrażeń postaci $\sum_i i\cdot$coś, bądź nawet po prostu mnożenia przez i, zazwyczaj oznacza użycie pochodnej. Jak z tych klocków poskładać rozwiązanie konkretnego zadania musi nam już podpowiedzieć doświadczenie.

By je zdobyć, proponuję następującą serię zadań (moje doświadczenie mówi, że każda tożsamość kombinatoryczna daje się udowodnić wielomianami, więc, aby trenować, można wziąć dowolny inny zestaw tożsamości kombinatorycznych i na nim poćwiczyć):

Zadanie 3: $\sum 2^i \binom{n}{i} = 3^n$

Zadanie 4: $\sum (-2)^i \binom{n}{i} = (-1)^n$

Zadanie 5: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Zadanie 6: $2^k\binom{n}{k} = \sum \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$

Zadanie 7: $n(n-1)2^{n-2} = \sum k(k-1)\binom{n}{k}$

Zadanie 8: $\binom{n}{k}\binom{n}{m} = \sum_j \binom{k}{j}\binom{m+j}{k}\binom{n}{m+j}$

Zadanie 9:$\sum 2^k\binom{n}{k}^2 = \sum \binom{n}{k}\binom{n+k}{n}$

Zadanie 10: $\binom{n}{n/2} = \sum_{i=0}^{n/2}(-1)^i\binom{n}{i}^2$ dla parzystych n.