Nierówności II

4.03.2009

1. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $abc \geqslant 1$. Udowodnij, że:

$$(1+a+b)^2 + (1+b+c)^2 + (1+c+a)^2 \geqslant 27.$$

2. Pokazać, że dla dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{b})^2} \geqslant \frac{2}{2+a+b}.$$

3. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz dla dodatnich liczb rzeczywistych $y_1, y_2, \ldots, y_n$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geqslant \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}.$$

4. a, b, c, d są takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $3\sqrt{3}(d+1) \geqslant a+b+c$. Dowieść, że zachodzi nierówność:

$$\frac{(a+bd)^2}{c} + \frac{(b+cd)^2}{a} + \frac{(c+ad)^2}{b} \geqslant abc.$$

5. Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wynosi 1. Wykaż, że:

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

6. Wykazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$