Nierówności dla grupy starszej

JensenJensenJensen

1. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ oraz $x + y + z = 3$. Pokazać, że:

$$\frac{4x-1}{3x+1} + \frac{4y-1}{3y+1} + \frac{4z-1}{3z+1} \leqslant \frac{9}{4}$$

2. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ oraz $x + y + z = 1$. Pokazać, że:

$$x\sqrt{y+z} + y\sqrt{x+z} + z\sqrt{x+y} \geqslant \sqrt{x(1-x) + y(1-y) + z(1-z)}$$

3. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pokazać, że:

$$\frac{x}{\sqrt{y^4+z^4}} + \frac{y}{\sqrt{x^4+z^4}} + \frac{z}{\sqrt{x^4+y^4}} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{x^4+y^4+z^4}}$$

4. Niech $a, b \in (0, \pi)$ oraz $\sin a + \sin b = 1$. Pokazać, że: $\sin(a+b) \leqslant \cos a \sin b + \cos b \sin a$

5. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego zaś, D,E,F odpowiednio przecięciami AI,BI,CI z przeciwległymi bokami. Pokazać, że:

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{AD \cdot BE \cdot CF} \geqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

6. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ciąg liczb rzeczywistych dodatnich sumujących się do 1. Pokazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1} \geqslant \frac{1}{e}^{\frac{1}{e}}$$

7. Pokazać, że dla $a, b, c \in R^+$ zachodzi:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3}{a+c}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+b}} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$

8. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takie, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \pi$ oraz $n \geqslant 2$. Pokazać, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg} \alpha_i \geqslant \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$