Mieszanka

1. Pokazać, że dla n całkowitego dodatniego liczba $p = 2^{2^n} + 1$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy $p | 3^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg zaś E jest punktem przecięcia jego przekątnych. Niech F będzie punktem przecięcia prostej stycznej do okręgu opisanego na trójkącie ABE przechodzącej przez A oraz prostej stycznej do okręgu opisanego na trójkącie CBE przechodzącej przez C. Pokazać, że jeśli $D \neq F$ to $DF \| AC$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie pierwsze p, dla którego liczby $1, 2, \ldots, p-1$ da się ustawić w kółku tak, by różnica iloczynów dwóch par kolejnych liczb na kółku nigdy nie dzieliła się przez p.

4. Pokazać, że jeśli $p | a^p - b^p$ to i $p^2 | a^p - b^p$.

5. W księstwie Hofmańskim jest pewna liczba stacji kolejowych, z których niektóre pary są połączone dwukierunkowymi torami. Każdą parę stacji łączy co najwyżej 1 tor. Każda stacja jest połączona z co najwyżej 3 innymi. Drogą między dwoma stacjami będziemy nazywali ciąg parami różnych torów z których kolejny się zaczyna tam, gdzie poprzedni skończył i który łączy stacje A i B. Pokazać, że książe jest w stanie podzielić tory pomiędzy spółki HKP - Intercity i HKP - Przewozy Regionalne tak, aby każde dwie stacje były połączone 0 lub 2 różnymi drogami, których tory należą tylko do HKP - Intercity oraz 0 lub 1 drogą, której tory należą do HKP - Przewozy regionalne.

6a. Pokazać, że jeśli dla $n > 1$ zachodzi $n | 2^n + 1$ to $3 | n$.

6b. Pokazać, że dla każdego k naturalnego $3^k | 2^{3^k} + 1$.

6c. Czy istnieje takie n nie będące potęgą 3, że $n | 2^n + 1$?