Cztery trudne nierówności

1. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi, że $abc = 1$. Pokazać, że:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

2. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta ostrokątnego. Pokazać, że:

$$(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)-(a^3+b^3+c^3) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

3. Pokazać, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi, to zachodzi:

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{z+x}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z} \geqslant \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{x+y+z}}$$

4. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} + \frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3} + \frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3} + \frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}$$