Menelaus

1. W trójkącie ABC punkty K, L są przecięciami dwusiecznych wewnętrznych kątów $\angle BAC$ i $\angle CBA$ odpowiednio z bokami BC i AC. Ponadto prosta AB przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ACB w punkcie M. Pokazać, że punkty K, L, M są współliniowe.

2. Na bokach BC,AC i AB trójkąta ABC obrano punkty K, L, M odpowiednio tak, że proste AK,BL,CM przecinają się w jednym punkcie P. Pokazać, że $\frac{AP}{PK} = \frac{AL}{LC} + \frac{AM}{MB}$.

3. Na prostych odpowiednio BC, AC, AB, zawierających boki trójkąta ABC obrano współliniowe punkty K, L, M. Niech X_A, X_B, X_C będą środkami boków odpowiednio BC, AC, AB zaś K', L', M' odbiciami K, L, M względem odpowiednio X_A, X_B, X_C. Pokazać, że K', L', M' są współliniowe.

4. W trapezie $ABCD$, w którym $BC > AD$, na dłuższej podstawie AB obrano taki punkt K by $KB = CD$. Następnie przeprowadzono przez punkt B taką prostą, by przecinała ona odcinki AD i KD w punktach odpowiednio E i F oraz by $AE = KF$. Na boku BC oznaczono taki punkt S, że $BS = AD$. Pokazać, że wówczas $EC \| FS$.

5. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kata ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R. Wykazać, że

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}$$

.

6. Dany jest trójkąt ABC i punkt P. Pokazać, że rzuty P na proste zawierające boki trójkąta są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na okżęgu opisanym na ABC.

7. Na płaszczyźnie dane są parami niewspółśrodkowe okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Pokazać, że punkty przecięcia zewnętrznych stycznych każdej z par okręgów leżą na jednej prostej.

8. Sfera s jest styczna do krawędzi AB czworościanu $ABCD$ w K, do krawędzi BC w L, do CD w M i do DA w N. Pokazać, że K, L, M, N leżą w jednej płaszczyźnie.