Liga zadaniowa, seria III

Termin: 16.02.2010

1. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych $a,\ b,\ c,\ d$ spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc + ab + bc\ + ca + a + b + c = 2 \\ bcd + bc\ + cd + db + b + c + d = 0 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 1 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 0 \end{cases}$$

2. Niech p będzie większą od 5 liczbą pierwszą oraz $S = \{p \quad n^2 :\ n \in \mathbb{N},\ n^2 < p\}$ (S jest zbiorem wszystkich liczb postaci $p \quad n^2$, gdzie n jest taką liczbą naturalną, że $n^2 < p$). Wykazać, że do zbioru S należą dwa różne, większe od 1, elementy $a,\ b$ takie, że $a|b$.

3. W trójkącie ABC długość środkowej CM jest równa długości boku AB. Punkt D jest symetryczny do punktu C względem punktu A, a punkt E jest symetryczny do punktu M względem punktu B. Udowodnić, że proste DM i CE są prostopadłe.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt D jest środkiem boku AC. Wykazać, że jeśli kąt AID jest prosty, to $AC + BC = 3AB$.

5. Liczby od 1 do $2n$ ustawiono w losowej kolejności na pozycjach od 1 do $2n$. Następnie do każdej z liczb dodano numer jej pozycji. Dowieść, że wśród otrzymanych sum są dwie o tej samej reszcie z dzielenia przez $2n$.

6. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ spełniające warunek: jeśli pominiemy którąkolwiek z nich, to pozostałe można podzielić na dwie grupy po n liczb w ten sposób, że sumy liczb z obu grup są równe. Wykaż, że $a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1}$.

7. Znaleźć wszystkie wielomiany P stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, mające n pierwiastków rzeczywistych, takie by dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2.$$

8. Rozważmy funkcje f, określone na zbiorze liczb całkowitych, takie, że równość $f(x) = f(x^2 + x + 1)$ zachodzi dla wszystkich liczb całkowitych x. Wyznaczyć:

(i) wszystkie funkcje parzyste f;

(ii) wszystkie funkcje nieparzyste f

spełniające powyższe warunki.

9. Punkt P należy do wnętrza kąta o ramionach OA i OB. Znaleźć punkty X na OA i Y na OB takie, by X, P, Y były współliniowe oraz iloczyn $XP \quad YP$ był najmniejszy.

10. Niech $N,\ n,\ k$ będą liczbami naturalnymi i $N > n$. Która liczba jest większa:

$$\underbrace{\sqrt{N + \sqrt{n + \sqrt{N + \ldots}}}}_{k} \quad \text{czy} \quad \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{N + \sqrt{n + \ldots}}}}_{k}\ ?$$

(*Uwaga: W każdym z powyższych wyrażeń jest k pierwiastków kwadratowych, a N i n występują na przemian.*)

Każde zadanie prosimy zapisywać jednostronnie na oddzielnej kartce.

Rozwiązania należy przynosić do sekretariatu do wtorku, 16.02.2010r., do 15.00. Powyższe zadania dostępne są na stronie wm.staszic.waw.pl/kolka/ i marta05.w.staszic.waw.pl/liga/. Wszystkie pytania i uwagi prosimy kierować na adres: m.kaminska@students.mimuw.edu.pl.

Miłej rozkminki;)!