

Liga zadaniowa, seria I

Termin: 16.12.2009

1. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą kąta padania jest równy kątowi odbicia. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nigdy nie trafił w wierzchołek, ani nie przeszedł wcześniej przez środek. Dowieść, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.

2. Udowodnić, że dla dowolnego pokolorowania dwoma kolorami nieograniczonej kartki papieru w kratkę można znaleźć prostokątny trójkąt równoramienny, którego wierzchołki są środkami kraterk tego samego koloru.

3. Znajdź największą wartość, jaką może przyjmować wyrażenie:

(i) $x^2y - y^2x$ dla $0 \leq x, y \leq 1$;

(ii) $x^2y + y^2z + z^2x - xz - yx - zy$ dla $0 \leq x, y, z \leq 1$.

4. Z szachownicy $2n \times 2n$ wycięto jedno narożne pole, zaś w przeciwległym rogu ustawiono pionek, który w każdym ruchu przestawiany na sąsiednie pole (czyli takie, które ma bok wspólny z polem, na którym stoi pionek). Czy można wykonać taki ciąg ruchów, żeby każde pole planszy było odwiedzone przez pionek dokładnie raz?

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku A wynosi 90° oraz $AB = AC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej DE przecina prostą BC w punkcie P . Wykazać, że $AP = DE$.

6. Wielomian nazywamy pierwotnym, jeśli największy wspólny dzielnik jego współczynników wynosi 1. Udowodnij, że iloczyn nieparzystej liczby wielomianów pierwotnych jest wielomianem pierwotnym.

Każde zadanie prosimy zapisywać jednostronnie na oddzielnej kartce.

Rozwiązania należy przynosić do sekretariatu do środy, 16.12.2009r., do 10.00. Powyższe zadania dostępne są na stronie marta05.w.staszic.waw.pl/liga/. Wszystkie pytania i uwagi prosimy kierować na adres: m.kaminska@students.mimuw.edu.pl.

Milej rozkminki;)!!!