Kółko z geometrii

TW. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Wówczas obrazy H przy symetrii względem boków leżą na okręgu opisanym na ABC.

1. Niech punkty A_1, B_1, C_1 będą przecięciami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C trójkąta ABC z okręgiem nań opisanym. Znaleźć stosunek:

$$\frac{[ABC]}{[AC_1BA_1CB_1]}$$

2. Na okręgu opisanym na trójkącie ABC obrano punkty A_2, B_2, C_2, by odcinki AA_2, BB_2, CC_2 były średnicami okręgu. Znaleźć stosunek:

$$\frac{[ABC]}{[AC_2BA_2CB_2]}$$

3. Na okręgu Γ dane są punkty A i B. Punkt C leży na okręgu i jest ruchomy. Znaleźć miejsce geometryczne ortocentrów trójkąta ABC przy zmiennym punkcie C.

4. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach ABH, ACH, BCH są przystające.

5. Niech AA_1, BB_1, CC_1 będą wysokościami trójkąta ABC. Pokazać, że:

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} \leqslant \frac{1}{4}$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość CC'. Niech S i T będą rzutami punktu C' na proste AC i BC odpowiednio. Pokazać, że na czworokącie $ABTS$ da się opisać okrąg.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość CC' zaś M jest środkiem odcinka AB. Prosta k jest prostopadła do BC i przechodzi przez C', zaś prosta l jest prostopadła do AC i również przechodzi przez C'. Proste k i l przecinają proste odpowiednio AC i BC w punktach K i L. Niech E będzie przecięciem odcinków KB i LA. Pokazać, że punkty E, M, C są współliniowe.

8. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość AA_1, zaś H jest jego ortocentrum. Pokazać, że jeśli R to promień okręgu opisanego na ABC zaś O jest środkiem tego okręgu, to zachodzi:

$$|AH||A_1H| = \frac{R^2 - |OH|^2}{2}$$