Kółko z prostej Simpsona

1. Pokazać, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi:

$$p|(p-1)!+1$$

2. Znaleźć wszystkie pary (k,l) liczb całkowitych nieujemnych spełniających równanie

$$2^k+3=5^l$$

.

3. Znaleźć wszystkie pary (k,l) liczb całkowitych nieujemnych spełniających równanie

$$2^k-7=5^l$$

.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okżag. Punkty P,Q,R są rzutami punktu D na boki BC, AC, AB odpowiednio. Pokazać, że $PQ=QR$ wtedy i tylko wtedy gdy dwusiecznie kątów ABC i ADC przecinają się na odcinku AC.

5. Prostokąt $A_1A_5A_6A_2$ podzielono odcinkiem A_3A_4 na dwa prostokąty tak, że A_3 leży na odcinku A_1A_5 zaś A_4 na odcinku A_2A_6. Następnie prostokąt $A_3A_4A_6A_5$ podzielono na dwa prostokąty odcinkiem XY, że X leży na odcinku A_5A_6 zaś Y na A_3A_4. Niech Q,P będą rzutami punktu X na proste A_3A_2 oraz A_1A_4 odpowiednio. Pokazać, że punkty A_5, Y, P są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy punkty A_6, Y, Q są współliniowe.

6. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt X na zewnątrz od niego i zawarty w kącie ABC, że P - rzut X na prostą AB leży na zewnątrz odcinka AB, zaś Q - rzut X na prostą BC leży wewnątrz odcinka BC. Niech R będzie przecięciem prostych AC i PQ. Pokazać, że proste AC i XR są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty XPA i XQC są podobne.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D i E są spodkami wysokości z A i B odpowiednio. Zbudowano prostokąt $EWDU$ taki, że dwa z jego boków zawierają się w prostej BC i wysokości spuszczonej z A. Prosta UW przecina bok AB w punkcie P. Pokazać, że proste EP i AB są prostopadłe.