

Zadanka z równanek funkcyjnych i nie tylko

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające własność dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ciągłe, spełniające własność dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)) = f(x) + x$$

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające własność dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla dowolnego x rzeczywistego spełnia równości:

$$f(x) = f(2x) = f(1 - x)$$

Dowieść, że f jest okresowa.

5. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o boku długości 1, zaś P punktem wewnątrz niego. Niech X, Y, Z odpowiednio przecięcia PA, PB, PC z bokami BC, AC, AB . Pokazać, że:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq PX + PY + PZ < 1$$

6. Niech $ABCD$ będzie czworobokiem foremny o krawędzi długości 1, zaś P punktem wewnątrz niego. Niech X, Y, Z, W odpowiednio przecięcia PA, PB, PC, PD ze ścianami BCD, ACD, ABD i ABC . Pokazać, że:

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \leq PX + PY + PZ + PW < 1$$