Skrypcik: tw. Olsona i zadanie o $2n$ liczbach

31 marca 2005

Rozważamy takie zadanie:

Zadanie. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Wykaż, że spośród $2n - 1$ liczb całkowitych można wybrać n o sumie podzielnej przez n.

Mimo prostego sformułowania jest to trudne zadanie. Po dłuższej chwili myślenia zauważmy, że:

Spostrzeżenie. Wystarczy udowodnić ten fakt dla n będących liczbą pierwszą.

Dowód. Niech $n = ab$, $a, b > 1$. Niech $T(x)$ oznacza, że teza zadania zachodzi dla $n = x$. Jeśli wykażemy, że $T(a), T(b) \Rightarrow T(ab)$, to będzie to oznaczało, że jeśli $T(p)$ dla każdej pierwszej p, to $T(n)$ dla każdego $n > 1$. Niech więc $a \geqslant b > 1$. Weźmy wobec tego $2ab-1$ liczb całkowitych. Z pierwszych $2a - 1$ liczb wybieramy a o sumie podzielnej przez a, pozostałe $a - 1$ wrzucamy spowrotem do puli liczb - mamy ich teraz $(2b - 1)a - 1$. Jesteśmy w stanie tak wybierać $2b - 1$ razy, po tym ruchu zostanie nam $a - 1$ liczb, z którymi już nic nie zrobimy. Mamy więc $2b - 1$ zbiorów po a liczb, każdy o sumie podzielnej przez a. Weźmy teraz $2b - 1$ liczb, będących sumami tych zbiorów podzielonymi przez a. Wybieramy z tych liczb b o sumie podzielnej przez b i suma tych wybranych ab liczb (z tych zbiorów co wybraliśmy liczby przez nie stworzone) dzieli się przez ab. ■

Wobec tego możemy się zająć rozważaniami tylko dla $n = p$ pierwszych. Spróbujmy zrobić to nie wprost i zastosować mega-super-bajer sztuczkę.

Weźmy wszystkie możliwe podzbiory naszych $2p - 1$ liczb. Jest ich $\binom{2p-1}{p}$, co nie dzieli się przez p. Dodajmy $p - 1$-sze potęgi sum tych podzbiorów. Robimy nie wprost – każda suma jest niepodzielna przez p, więc z Małego Twierdzenia Fermata $p - 1$-sza potęga przystaje do 1 modulo p. Czyli cała suma jest sumą $\binom{2p-1}{p}$ jedynek modulo p, czyli nie dzieli się przez p.

Oznaczmy te liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$. Spójrzmy na wyrażenie $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_{2p-1}^{k_{2p-1}}$, przy czym $k_1 + \ldots + k_{2p-1} = p - 1$. Ile razy takie wyrażenie powstanie przy rozbiciu naszej sumy z wzorów dwumianowych Newtona (tj jaki będzie przy nim współczynnik)? Niech w nim k liczb spośród $k_1, \ldots, k_{2p-1}$ jest dodatnich. Każde takie wyrażenie powstaje z składnika sumy, gdzie w zbiorze sumowanym występują wszystkie liczby o dodatnich wykładnikach k_i. Wobec tego takich nawiasów jest $\binom{2p-1-k}{p-k}$ (wybieramy pozostałe liczby to tych k liczb). Ta liczba dla $0 < k < p$ jest podzielna przez p. Przy tym oczywiście, z każdego nawiasu współczynnik przy tym wyrazie będzie taki sam. Wobec tego Współczynnik przy tym wyrazie będzie podzielny przez p. Czyli cała suma będzie podzielna przez p, sprzeczność. ■

To był bardzo pomysłowy dowód. A teraz twierdzenie, które załatwia takie przypadki:

Twierdzenie Olsona. Niech $k > 1$ będzie liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą. Spośród $k(p - 1) + 1$ elementów grupy $\mathbb{Z}_p^k$ można wybrać niepusty podzbiór o sumie zero.

Gwoli wyjaśnienia: grupa $\mathbb{Z}_p^k$ to elementy zbioru $\{0, 1, \ldots, p - 1\}^k$ (czyli każdy element to k reszt modulo p) z dodawaniem na każdej współrzędnej modulo p.

Stosując to twierdzenie już bardzo łatwo rozwiązać zadanie dla $n = p$ pierwszych: niech nasze liczby to będą $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$, weźmy do tw. Olsona dla $k = 2$ liczby $(a_i, 1)$. Istnieje ich podzbiór o sumie $(0, 0)$, ale skoro tak, to tych liczb musi być p, aby druga współrzędna się wyzerowała. Czyli istnieje p liczb spośród danych o sumie podzielnej przez p. ■