

Krótkie przypomnienie z geometrii

8 stycznia 2004

1. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w S . Proste k i l przechodzą przez S i przecinają okrąg ω_1 odpowiednio w A i B , zaś ω_2 odpowiednio w C i D . Proste AD i BC przecinają się w E . Wykaż, że prosta ES przechodzi przez środek odcinka CD .

2. Dany jest trójkąt ABC . Okręgi ω_1 i ω_2 przechodzą przez punkty B i C oraz przecinają boki: AB odpowiednio w D i E , zaś AC odpowiednio w F i G . Wykaż, że jeśli punkty D , E , F , G leżą na jednym okręgu, to ABC jest równoramienny.

3. Na trójkącie rozwartokątnym różnobocznym ABC (kątem A jest rozwarty) opisano okrąg o środku w O . Punkt S jest takim punktem na półprostej OA nie należącym do odcinka OA , że kąty OSB i OSC są równe. Wykaż, że też kąty ABC i ABS są równe.

4. W trójkącie ABC prosta k jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B . Okrąg styczny do prostej k w punkcie B i przechodzący przez wierzchołek C przecina bok AB w punkcie D . Punkt E leży na półprostej \overrightarrow{CD} i spełnia równanie $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AD}$. Udowodnij, że jeżeli okrąg opisany na $\triangle BDE$ jest styczny do BC , to $|\angle ACB| = 2|\angle CAB|$.

5. Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB , BC , CD , DA odpowiednio w punktach K , L , M , N , przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że proste BD i OS są prostopadłe.