Kilka zadań z geometrii przestrzennej

środa, 7 kwietnia 2004

Trochę zadań ideologicznych

I1. Czy czworościan może mieć trzy osie symetrii i nie być foremnym?

I2. Czy istnieje czworościan V_2 zawarty w czworościanie V_1, że pole powierzchni całkowitej V_2 jest większe od pola powierzchni całkowitej V_1?

I3. Przeciąć czworościan foremny płaskim cięciem na dwa wielościany przystające. Na ile sposobów można to zrobić?

I4. Dany jest czworościan $ABCD$. Wykazać równoważność:

1. Naprzeciwległe krawędzie czworościanu mają równą długość.
2. Ściany są przystające.
3. Ściany mają równe pola.
4. Wszystkie 3 odcinki łączące środki naprzeciwległych krawędzi są prostopadłe do tych krawędzi.
5. Dwa spośrod odcinków łączących środki naprzeciwległych krawędzi są prostopadłe do tych krawędzi.

I5. Dany jest czworościan $ABCD$. Wykazać równoważność:

1. Naprzeciwległe krawędzie czworościanu są prostopadłe.
2. Suma kwadratów długości naprzeciwległych krawędzi czworościanu jest równa.
3. Istnieje przecięcie wysokości tego czworościanu.

Zadania prostsze

Z1. Czworościan $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, punkty X i Y się poruszają. Udowodnij, że suma kątów w krzywym czworokącie $AXBY$ jest stała.

Z2. W czworościanie ABCD zachodzą następujące równości: $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$ i $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$. Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

Z3. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok $ABCD$, S jest jego wierzchołkiem, punkt A spodkiem wysokości. Okręgi wpisane w ściany SBC i SDC są styczne. Wykazać, że podstawą tego ostrosłupa jest romb.

Z4. Prowadzimy w czworościanie cztery proste łączące odpowiednio jego wierzchołki ze środkami okręgów wpisanych w przeciwległe ściany. Wykazać, że jeśli dwie spośród tych prostych przecinają się, to i dwie pozostałe przecinają się.

Dwa zadania z poprzedniego kółka

P1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ABC czworościanu $ABCD$. Sfera o środku w O i promieniu OA przecina krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C'. Udowodnij, że ta sfera jest prostopadła do sfery opisanej na czworościanie $A'B'C'D$.

P2. W pewnym czworościanie sfera wpisana jest styczna na jednej ścianie w środku ciężkości, na drugiej w ortocentrum, a na trzeciej w środku okręgu wpisanego. Wykaż, że to musi być czworościan foremny.

Trzy zadania z kombinatoryki dla odmiany

K1. Gracze malują na przemian wierzchołki sześcianu, każdy ma swój kolor i w ruchu maluje trzy wierzchołki. Gracz pierwszy wygrywa, jeśli pomaluje całą jedną ścianę na swój kolor, w przeciwnym razie wygrywa gracz drugi. Kto ma strategię wygrywającą.

K2. Dany jest wielościan wypukły, którego każda ściana jest trójkątem. Udowodnij, że da się tak pomalować jego krawędzie na czerwono lub niebiesko, że dla każdego wierzchołka można dojść do każdego innego poruszając się wyłącznie po czerwonych oraz wyłącznie po niebieskich krawędziach.

K3. Czy sześcian można podzielić na różne sześciany w liczbie większej niż jeden sześcian?