Kilka zadań z geometrii

czwartek, 30 października 2003

1. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina te okręgi jeszcze odpowiednio w punktach C i D. Punkty M i N są środkami łuków BC i BD niezawierających A. Wykaż, że $|\measuredangle MKN| = 90°$.

2. Niech A_1, B_1, C_1 będą punktami styczności okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC z odpowiednio bokami BC, AC i AB. Niech K będzie takim punktem na okręgu ω, że odcinek C_1K jest średnicą ω, zaś punkt D będzie przecięciem prostych A_1K i B_1C_1. Wykaż, że $|CD| = |CB_1|$.

3. Dany jest okrąg Ω opisany na trójkącie ABC. Punkty A_0 i B_0 są środkami łuków odpowiednio BC i AC nie zawierających punktów odpowiednio A i B. Niech S_A i S_B bę"da okręgami stycznymi do odpowiednio BC i AC oraz o środkach w punktach A_0 i B_0. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na wspólnej stycznej S_A i S_B.

4. Niech A_1, B_1, C_1 będą punktami styczności okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC z odpowiednio bokami BC, AC i AB. Dla każdych dwóch trójkątów AB_1C_1, BA_1C_1 i CA_1B_1 narysujmy wspólną styczną zewnętrzną okręgów wpisanych w te trójkąty różną od boków trójkąta. Wykaż, że te styczne mają punkt wspólny.

5. Dany jest wielościan wypukły opisany na sferze S. *Superścianą* takiego wielościanu nazywamy taką ścianę F, że rzut prostopadły sfery S na płaszczyznę zawierającą F zawiera się całkowicie w ścianie F. Ile maksymalnie *superścian* może mieć ten wielościan?

6. Czy istnieje wielościan wypukły, którego żadne trzy krawędzie nie mogą być bokami trójkąta?

7. Przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę P styczną do sfery opisanej na $ABCD$. Wykaż, że proste będące przecięciami płaszczyzn ABC, ABD i ACD z płaszczyzną P tworzą sześć równych kątów wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi warunek:

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$