

Nietrudna kombinatoryka

17 marca 2005

110. Liczby całkowite dodatnie x i y spełniają równanie

$$3x^2 + x = 4y^2 + y.$$

Wykaż, że $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

111. W punktach kratowych (x, y) , $1 \leq x, y \leq 100$, posadzono drzewa. Ile maksymalnie drzew można wyciąć, aby stojąc w miejscu każdego wyciętego drzewa, nie było widać żadnych innych ubytków w lesie?

112. Na płaszczyźnie danych jest $n > 1$ różnych punktów. Malujemy na różowo środek każdego odcinka o końcach w danych punktach. Ile może być minimalnie różowych punktów?

113. 1994 dziewczynek gra w grę. Siedzą one przy okrągłym stoliku, na początku jedna z nich ma n kart, reszta nie ma żadnej karty. W danym ruchu, jedna z dziewczynek, co ma przynajmniej dwie karty, daje po karcie sąsiadkom. Wykazać, że gra się skończy wtedy i tylko wtedy gdy $n < 1994$.

114. Szachownicę $n \times n$ pokrywamy białymi i czarnymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi o przyprostokątnych równych 1 (każde pole dwoma trójkątami). Trójkąty mające wspólny bok mają mieć różny kolor. Ile jest różnych ułożeń trójkątów?

115. Kłoczek to sześcianik $2 \times 2 \times 2$ z usuniętym jednym sześcianikiem o boku 1. Dany jest sześcian o boku 2^n z usuniętym jednym sześcianikiem o boku 1. Wykazać, że można go wypełnić klockami.

116. Szachownicę 7×7 pokrywamy klockami 3×1 i jednym klockiem 1×1 . Wykazać, że klocek 1×1 stoi na środku szachownicy bądź przy którymś boku.

117. Danych jest $2n - 1$ liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje podzbiór n z nich, którego suma jest podzielna przez n .