Prosta Eulera i okrąg dziewięciu punktów

piątek, 8 października 2004

11. W trójkącie ABC niech punkty O i H będą odpowiednio: środkiem okręgu opisanego i ortocentrum. Wykazać, że pola dwóch spośród trójkątów AOH, BOH i COH sumują się do pola trzeciego trójkąta

12. W trójkącie ABC niech A_1 będzie przecięciem dwusiecznej wewnętrznej kąta A z okżegiem opisanym na trójkącie ABC. Analogicznie konstruujemy punkty B_1 i C_1. Niech A_2 będzie przecięciem dwusieczny zewnętrznych kątów B i C trójkąta ABC. Analogicznie konstruujemy punkty B_2 i C_2.

(1) Wykazać, że trójkąt $A_2B_2C_2$ ma dwa razy większe pole od sześciokąta $AC_1BA_1CB_1$.

(2) Wykazać, że trójkąt $A_2B_2C_2$ ma co najmniej cztery razy większe pole od trójkąta ABC.

13. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AD, BE i CF są wysokościami, punkt H jest ortocentrum, punkty M i N są środkami odcinków AH i BC odpowienio, zaś proste k i l zawierają dwusieczne odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne kąta BAC. Prosta MN przecina proste k i l odpowiednio w punktach K i L.

(1) Wykazać, że proste EF i MN są prostopadłe.

(2) Wykazać, że $AH = KL$.

14. W trójkącie ABC odcinki AA_1, BB_1 i CC_1 są wysokościami, punkt H jest ortocentrum, zaś punkty A_2, B_2, C_2 są środkami odpowiednio boków BC, AC i AB. Dla prosta HA_2 przecina okrąg dziewięciu punktów trójkąta ABC w punktach A_2 i A_3, analogicznie tworzymy punkty B_3 i C_3.

(1) Wykazać, że proste A_1A_3, B_1B_3 i C_1C_3 przecinają się w jednym punkcie na prostej Eulera trójkąta ABC.

(2) Wykazać, że proste AA_3, BB_3 i CC_3 mają punkt wspólny.