Czeska Olimpiada Matematyczna

piątek, 7 stycznia 2005

70. *(sprzed świąt)* Dana jest liczba całkowita $k > 1$. Wykazać, że istnieje ciąg liczb całkowitych $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ taki, że $a_1 = k$ i dla każdego naturalnego n zachodzi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mid a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

71. Wyznaczyć, dla jakich liczb całkowitych dodatnich n całkowitą jest liczba $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i!}$.

72. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4},\ y^2 - \frac{8}{y^4},\ z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}.$$

73. W Księstwie Hofmańskim obowiązuje dwuliterowy alfabet, składający się tylko z liter P i H. Słowami w tym alfabecie są wszystkie skończone ciągi liter z alfabetu, nie zawierające podsłowa PPPP oraz HHH. Niech p_n oznacza liczbę słów n-literowych. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

74. Danych jest 121 różnych cięciw $p_1, p_2, \ldots, p_{121}$ okręgu ω. Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, 121\}$ dany jest punkt A_i należący do cięciwy p_i. Wykazać, że na okręgu istnieje taki punkt X, że dla co najmniej 29 indeksów i kąt między cięciwą p_i a prostą A_iX jest niewiększy niż $21°$.

75. Niech L będzie dowolnym punktem krótszego łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Niech K będzie przecięciem prostych AL i CD, zaś M przecięciem prostych AD i CL. Proste MK i BC przecinają się w punkcie N. Wykazać, że punkty B, L, M, N leżą na jednym okręgu.

76. Niech $\mathbb{R}_+$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}_+$ warunek

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y).$$

77. Punkt G leży we wnętrzu trójkąta ABC. Proste AG, BG, CG przecinają boki BC, CA i AB w punktach D, E i F odpowiednio. W czworokąty $AFGE$, $BDGF$ i $CEGD$ da się wpisać okręgi i co więcej te okręgi mają parami wspólne punkty. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoboczny.

78. Dany jest rozwarty kąt AKS. Skonstruować trójkąt ABC tak, by S był środkiem boku BC, zaś punkt K był takim punktem boku BC, by AK było dwusieczną kąta BAC.

79. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ i $abc = 1$, to zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c.$$