Inne zadanka z geometrii

piątek, 5 listopada 2004

31. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N. Wspólna styczna bliżej M jest do nich styczna odpowiednio w punktach P i Q. Prosta PN przecina okrąg ω_2 w punktach N i R. Wykazać, że prosta MQ zawiera dwusieczną kąta PMR.

32. Okrąg S jest styczny wewnętrznie do okręgu T w A. Z punktu P na T poprowadzono styczne do S, które przecinają T w Q i R i są styczne do S w punktach X i Y. Udowodnić, że kąt QAR jest dwukrotnie większy od kąta XAY.

33. W trójkącie ABC $BC > AB$. P jest takim punktem wewnątrz trójkąta ABC, że $\measuredangle PAC = \measuredangle BCA$ są równe. Punkt Q na zewnątrz trójkąta jest taki, że $PQ \| AB$ i $BQ \| AC$. R jest takim punktem na BC (po przeciwnej stronie AP niż Q) że $\measuredangle PRQ = \measuredangle BCA$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ABC i PQR są styczne.

34. Wypukły czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Symetralne AB i AC przecinają prostą AD w punktach W i V, proste CV i BW przecinają się w T. Udowodnić, że

$$|BT - CT| = AD.$$

35. W trójkącie ABC kąt $\measuredangle ABC = 2\measuredangle ACB$. Punkt D dzieli bok BC w stosunku $2:1$. E jest takim punktem, że D jest środkiem odcinka AE. Udowodnić, że

$$2\measuredangle ECB = \measuredangle EBC + \pi.$$

36. Dwusieczne CE i BD trójkąta ABC przecinają się w punkcie I. Wykazać, że $DI = EI$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle BAC = 90°$.

37. Punkty P, Q i R należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Proste AP, BQ i CR przecinają się w punkcie S. W czworokąt $PCQS$ jest wpisany okrąg ω_1, a w czworokąt $PBRS$ jest wpisany okrąg ω_2. Okrąg ω_1 jest styczny do QS w punkcie E, a okrąg ω_2 jest styczny do RS w punkcie F. Wykazać, że $EQ = FR$.

38. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia warunki: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

39. Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie n-kątem wypukłym o równych bokach, zaś Ω okręgiem. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ okrąg Ω przecina bok A_iA_{i+1} w punktach B_i i C_i, przy czym punkt B_i leży bliżej A_i (przyjmujemy numerację modulo n). Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} A_iB_i = \sum_{i=1}^{n} C_iA_{i+1}.$$

310*. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, O środkiem okręgu opisanego na nim, a R - promieniem tego okręgu. Prosta AO przecina okrąg opisany na trójkącie BOC w D, analogicznie tworzymy punkty E i F. Udowodnić, że

$$OD \cdot OE \cdot OF \geqslant 8R^3.$$