Kółko z Jensena

1. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, że $x + y + z = 3$ zachodzi:

$$\frac{3x+2}{x+1} + \frac{3y+2}{y+1} + \frac{3z+2}{z+1} \leqslant \frac{15}{2}$$

2. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$x\sqrt{y+z} + y\sqrt{x+z} + z\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

3. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant 1$$

4. Liczby x, y, z są nieujemne i sumują się do $\frac{\pi}{2}$. Pokazać, że:

$$1 \leqslant \sin x + \sin y + \sin z \leqslant \frac{3}{2}$$

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś punkty K, L, M są odpowiednio przecięciami dwusiecznych kątów wewnętrznym trójkąta ABC z bokami BC, AC, AB. Pokazać, że:

$$\frac{AK \cdot BL \cdot CM}{AM \cdot BK \cdot CL} \leqslant 3\sqrt{3}$$

6. Pokazać, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1, to zachodzi:

$$\sqrt{(b+c)(2a+b+c)} + \sqrt{(a+c)(a+2b+c)} + \sqrt{(a+b)(a+b+2c)} \leqslant 2\sqrt{2}$$

7. Pokazać, że jeśli liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1 to:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^2$$

8. Pokazać, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1, to zachodzi:

$$a^a b^b c^c \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$