KÓŁECZKO Z INWERSJI (12.03.2008)

1. TEORIA

1.0. Definicja: Inwersja to przekształcenie płaszczyzny bez punktu na nią samą. Niech O będzie środkiem inwersji, zaś r jej promieniem. Dla dowolnego punktu $P \neq O$ jego obrazem jest
punkt P' leżący na półprostej OP taki, że $OP \cdot OP' = r^2$.

1.1. Inwersja o środku O przekształca:
Okręgi przechodzące przez O na proste nieprzechodzące przez O
Okręgi nieprzechodzące przez O na okręgi nieprzechodzące przez O
Proste nieprzechodzące przez O na okręgi przechodzące przez O
Proste przechodzące przez O na nie same

1.2. Inwersja zachowuje punkty wspólne oraz kąty między figurami (kąt pomiędzy krzywymi to kąt
pomiędzy stycznymi do nich w punkcie przecięcia).

2.ZADANKA

2.0. Dane są trzy okręgi, w tym dwa styczne. Skonstruować okrąg styczny do tych trzech okręgów.

2.1. Dany jest okrąg o oraz punkty A i B inwersyjne względem tego okręgu. Punkt C należy do okręgu o. Wykazać, że iloraz $\frac{CA}{CB}$ nie zależy od wyboru punktu C.

2.2. Średnice AB i EF okręgu o są prostopadłe. Punkt K należy odpowiednio do tego okręgu, proste AK i BK przecinają prostą EF odpowiednio w punktach P i R. Wykazać, że
punkty P i R są inwersyjne względem okręgu o.

2.3. Dane są okręgi o_1, o_2, o_3, o_4, przy czym okręgi o_1 i o_2, o_2 i o_3,
o_3 i o_4, o_4 i o_1 są styczne zewnętrznie w punktach A, B, C, D. Wykazać, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

2.4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie BC i okrąg o opisany na tym trójkącie. Okrąg o_1 jest styczny do odcinka BC oraz do tego łuku BC okręgu o, do którego nie należy punkt A. Wykazać, że okrąg o_1 jest okręgiem stałym inwersji o środku A i promieniu AB.

2.5. Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest
środkiem tego łuku AD, na którym nie leży punkt C, a punkt Q jest środkiem tego łuku BD, na
którym nie leży C. Udowodnić, że proste CD i PQ są prostopadłe.

2.6. Dany jest okrąg o oraz okręgi o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 styczne wewnętrznie
do okręgu o w punktach odpowiednio A, B, C, D, E, F, takie że okręgi o_1 i o_2, o_2
i o_3, o_3 i o_4, o_4 i o_5, o_5 i o_6, o_6 i o_1 są styczne zewnętrznie. Wykazać,

że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.