

Indonezja

28.01.2010

1. Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą większymi od 1 liczbami rzeczywistymi. Wykazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{x_1x_2}{x_3-1} + \frac{x_2x_3}{x_4-1} + \frac{x_3x_4}{x_5-1} + \dots + \frac{x_nx_1}{x_2-1} \geq 4n.$$

2. $W(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$, gdzie $a_{2n} \neq 0$ i $a_{2n-i} = a_i$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Wykazać, że istnieje taki wielomian Q stopnia n , że $W(x) = Q(x + \frac{1}{x}) - nx$.

3. Punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AD i BC prostokąta $ABCD$. R jest takim punktem na półprostej DC , że $DR > DC$, a X to punkt przecięcia prostych RQ i DB . Wykazać, że $\angle QPC = \angle QPB$.

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, z , że $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2 + z^2$.