

Zadania - dzień drugi

grupa pierwszoklasistów

wtorek, 26 września 2006

21. Niech s_n będzie sumą n kolejnych liczb pierwszych poczynając od 2. Pokazać, że pomiędzy s_n a s_{n+1} istnieje kwadrat liczby całkowitej.

22. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y takich, że liczby $2x+y, 3x-2y, 11x+9y$ są kwadratami liczb całkowitych.

23. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB , N środkiem boku AC , O środkiem okręgu opisanego oraz I środkiem okręgu wpisanego. Pokazać, że punkty M, O, N, I, A leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy długość boku BC jest średnią arytmetyczną długości boków AB i AC .

24. W czworokącie $ABCD$ kąty przy wierzchołku D są proste. Ponadto $|AD| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 11$. Znaleźć sumę kątów przy wierzchołku C .

25. Wojtek pisze na tablicy ciąg liczb całkowitych należących do przedziału od 1 do 541 tak, aby pomiędzy każdymi dwoma liczbami równymi w ciągu występowała liczba od nich mniejsza. Ile co najwyżej liczb może napisać Wojtek?

Zadania - dzień drugi

grupa młodsza

wtorek, 26 września 2006

22. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y takich, że liczby $2x+y, 3x-2y, 11x+9y$ są kwadratami liczb całkowitych.

23. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB , N środkiem boku AC , O środkiem okręgu opisanego oraz I środkiem okręgu wpisanego. Pokazać, że punkty M, O, N, I, A leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy długość boku BC jest średnią arytmetyczną długości boków AB i AC .

24. W czworoboku $ABCD$ kąty przy wierzchołku D są proste. Ponadto $|AD| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 11$. Znaleźć sumę kątów przy wierzchołku C .

25. Wojtek pisze na tablicy ciąg liczb całkowitych należących do przedziału od 1 do 541 tak, aby pomiędzy każdymi dwoma liczbami równymi w ciągu występowała liczba od nich mniejsza. Ile co najwyżej liczb może napisać Wojtek?

26. Znaleźć wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takich, że $p|qr - 1$, $q|pr - 1$ i $r|pq - 1$.

Zadania - dzień drugi

grupa starsza

wtorek, 26 września 2006

22. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y takich, że liczby $2x+y, 3x-2y, 11x+9y$ są kwadratami liczb całkowitych.

23. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB , N środkiem boku AC , O środkiem okręgu opisanego oraz I środkiem okręgu wpisanego. Pokazać, że punkty M, O, N, I, A leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy długość boku BC jest średnią arytmetyczną długości boków AB i AC .

24. W czworokącie $ABCD$ kąty przy wierzchołku D są proste. Ponadto $|AD| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 11$. Znaleźć sumę kątów przy wierzchołku C .

26. Znaleźć wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takich, że $p|qr - 1$, $q|pr - 1$ i $r|pq - 1$.

27. W wypukłym 2004-kącie żadna trójka przekątnych nie przecina się w jednym punkcie. Każdą z przekątnych (ale nie boków) pomalowano na jeden z 1001 kolorów. Pokazać, że istnieje trójkąt, którego wierzchołkami są wierzchołki 2004-kąta bądź punkty przecięcia jego przekątnych, mający wszystkie 3 boki tego samego koloru.

28. Gópi Stach zaprosił na imprezę $2n$ kumpli, więc w sumie było na niej $2n + 1$ ludzi. Okazało się, że dla każdej grupy n imprezowiczów istnieje imprezowicz spoza tej grupy, który zna wszystkich członków grupy (jeżeli imprezowicz A zna B , to B zna A). Pokazać, że istnieje imprezowicz znający wszystkich bawiących się u Stacha.

Zadania - dzień drugi

grupa najstarsza

wtorek, 26 września 2006

24. W czworościanie $ABCD$ kąty przy wierzchołku D są proste. Ponadto $|AD| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 11$. Znaleźć sumę kątów przy wierzchołku C .

26. Znaleźć wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takich, że $p|qr - 1$, $q|pr - 1$ i $r|pq - 1$.

27. W wypukłym 2004-kącie żadna trójka przekątnych nie przecina się w jednym punkcie. Każdą z przekątnych (ale nie boków) pomalowano na jeden z 1001 kolorów. Pokazać, że istnieje trójkąt, którego wierzchołkami są wierzchołki 2004-kąta bądź punkty przecięcia jego przekątnych, mający wszystkie 3 boki tego samego koloru.

28. Gópi Stach zaprosił na imprezę $2n$ kumpli, więc w sumie było na niej $2n + 1$ ludzi. Okazało się, że dla każdej grupy n imprezowiczów istnieje imprezowicz spoza tej grupy, który zna wszystkich członków grupy (jeżeli imprezowicz A zna B , to B zna A). Pokazać, że istnieje imprezowicz znający wszystkich bawiących się u Stacha.

29. Znaleźć liczbę ciągów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb całkowitych takich, że $a_n \neq -1$ oraz:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + 2006}{a_{n+1} + 1}$$

Dla n całkowitych dodatnich.

210. Okręgi C_1 i C_2 są styczne wewnętrznie do okręgu Γ odpowiednio w punktach B i C oraz do siebie zewnętrznie w D . Jednym z punktów przecięcia ich wspólnej stycznej przechodzącej przez D z okręgiem Γ jest A . Prosta AB przecina C_1 ponownie w K a prosta AC przecina C_2 ponownie w L . Prosta BC przecina ponownie C_1 w M i C_2 w N . Pokazać, że proste AD, KM i LN są współpękowe.