Zadania - dzień pierwszy

grupa pierwszoklasistów

poniedziałek, 25 września 2006

11. Liczbą Grabowskiego nazywamy liczbę składającą się w zapisie dziesiętnym z samych jedynek. Pokazać, że dla każdego k niepodzielnego ani przez 2 ani przez 5 istnieje liczba Grabowskiego podzielna przez k.

12. W księstwie Hofmańskim jest dziesięć lotnisk, z każdego z nich do czterech innych odbywają się loty. Ponadto z każdego lotniska da się dolecieć do każdego (być może odwiedzając inne lotniska). Pokazać, że jeśli odwołane zostały loty między lotniskami A i B oraz pomiędzy B i C, to nadal z każdego lotniska da się dolecieć do każdego.

13. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω zaś punkt P jest zmiennym punktem na niej. Cięciwa CD przechodzi przez punkt P i jest nachylona pod kątem $45°$ do prostej AB. Pokazać, że wartość wyrażenia $CP^2 + DP^2$ nie zależy od położenia punkt P.

14. Na płaszczyźnie rozmieszczono $n > 2$ punktów tak, że żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że istnieje taka trójka punktów P, Q, R, że $\angle PQR < \frac{180°}{n-2}$.

15. Pokazać, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

Zadania - dzień pierwszy

grupa młodsza

poniedziałek, 25 września 2006

12. W księstwie Hofmańskim jest dziesięć lotnisk, z każdego z nich do czterech innych odbywają się loty. Ponadto z każdego lotniska da się dolecieć do każdego (być może odwiedzając inne lotniska). Pokazać, że jeśli odwołane zostały loty między lotniskami A i B oraz pomiędzy B i C, to nadal z każdego lotniska da się dolecieć do każdego.

13. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω zaś punkt P jest zmiennym punktem na niej. Cięciwa CD przechodzi przez punkt P i jest nachylona pod kątem $45°$ do prostej AB. Pokazać, że wartość wyrażenia $CP^2 + DP^2$ nie zależy od położenia punkt P.

14. Na płaszczyźnie rozmieszczono $n > 2$ punktów tak, że żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że istnieje taka trójka punktów P, Q, R, że $\angle PQR < \frac{180°}{n-2}$.

15. Pokazać, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

18. Kwadrygą nazywamy iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o 1. Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych kwadryg jest kwadrygą.

Zadania - dzień pierwszy

grupa starsza

poniedziałek, 25 września 2006

14. Na płaszczyźnie rozmieszczono $n > 2$ punktów tak, że żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że istnieje taka trójka punktów P, Q, R, że $\angle PQR < \frac{180^\circ}{n-2}$.

15. Pokazać, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

16. Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $a + b + c \geqslant abc$. Pokazać, że wówczas:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{3}abc$$

.

17. W trójkącie równoramiennym ABC kąt C ma 100^o. Udowodnić, że wtedy:

$$|AB|^3 + |BC|^3 = 3|AB| \cdot |BC|^2$$

18. Kwadrygą nazywamy iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o 1. Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych kwadryg jest kwadrygą.

Zadania - dzień pierwszy

grupa najstarsza

poniedziałek, 25 września 2006

15. Pokazać, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

17. W trójkącie równoramiennym ABC kąt C ma 100°. Udowodnić, że:

$$|AB|^3 + |BC|^3 = 3|AB| \cdot |BC|^2$$

18. Kwadrygą nazywamy iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o 1. Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych kwadryg jest kwadrygą.

19. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, proste AB i CD przecinają się w punkcie P, proste AD i BC przecinają się w punkcie R. Wykazać, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów $\angle ARB$ i $\angle BPC$ jest współliniowy ze środkami przekątnych czworokąta $ABCD$.

110. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi że $abc = 1$. Pokazać, że:

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \leqslant 1$$

.