Kolorowanki i insze badziewia

1. Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC dobudowano do zewnątrz prostokąty $ABKL$ i $CAMN$ o równych polach. Punkt P jest środkiem odcinka KM, zaś O środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Pokazać, że punkty P,A,O są współliniowe.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z, ze $0 < x < y < z < p$. Wykazać, ze jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p, to liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest podzielna przez $x + y + z$.

3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Niech I i J beda odpowiednio środkami okregów wpisanych w trójkąty ACD i BCD. Okrąg opisany na trójkącie IJD przecina prostą AB po raz drugi w punkcie S. Wykazać, że $BC + AS = AC + BS$.

4. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \ldots \sqrt[n]{n}}}} < 2$$

.

5. Dany jest trójkąt o bokach długości a,b,c i polu F. Niech x,y i z bedą odległościami środka ciężkości od wierzchołków. Udowodnić, ze zachodzi nierówność:

$$x + y + z \geqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2F\sqrt{3}}$$

.

6. Dany jest czworościan $ABCD$ (niekoniecznie foremny) mający nastepującą własność: Istnieje sfera $\kappa = \kappa(A, B, C)$, dla której:

(a) BC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną BCD

(b) AC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ACD

(c) AB jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ABD

Udowodnić, że istnieją sfery $\kappa(A, B, D)$, $\kappa(B, C, D)$ i $\kappa(C, A, D)$ majace analogiczne własnosci do (a), (b) i (c).