

**KÓŁECZKO Z GRAFÓW (2.01.08)**  
**(Z ŻYCZENIAMI NOWOROCZNYMI GRATIS :))**

**1. TEORIA**

**1.1.** Graf - wierzchołki i krawędzie między nimi.

**1.2.** Standardowe oznaczenia  $\Rightarrow G$  - graf;  $V$  - zbiór wierzchołków;  $E$  - zbiór krawędzi;  $deg(v)$  - stopień wierzchołka (liczba krawędzi wychodzących z danego wierzchołka).

**1.3.** Graf spójny to taki, w którym da się przejść z każdego wierzchołka do każdego. Drzewo, to graf spójny, nie mający cyklu. Graf planarny to taki, który można narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały. Graf dwudzielny to taki, którego wszystkie wierzchołki da się podzielić na dwa podzbiory takie, że każda krawędź łączy wierzchołki z różnych podzbiorów.

**2.ZADANKA**

**2.0.** Pokazać, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego cykle są parzystej długości.

**2.1.** W pewnym państwie jest  $n$  miast, w tym jedna stolica, niektóre z nich są połączone jednokierunkowymi drogami. Wiadomo, że ze stolicy można dojechać do każdego miasta oraz, że z każdego miasta wychodzi tyle samo dróg, co do niego wchodzi. Pokazać, że z każdego miasta można dojechać do stolicy.

**2.2.** Dowieść, że wśród dowolnych 18 osób istnieją cztery, z których każde dwie się znają lub cztery, z których żadne dwie się nie znają.

**2.3.** W turnieju GO brało udział  $n$  graczy. Każdy rozegrał z każdym jeden mecz i nie było remisów. Udowodnić, że istnieje gracz, który ograł każdego innego gracza pośrednio lub bezpośrednio (tzn. ograł innego gracza, który go ograł).

**2.4.** W państwie znajduje się 66 miast, a przewozy między każdymi dwoma obsługuje jeden z czterech przewoźników. Udowodnić, że istnieją takie trzy miasta, że drogi między nimi są obsługiwane przez samego przewoźnika.

**2.5.** W przestrzeni dane są 244 punkty, z których każde 4 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z punktów połączona odcinkiem koloru różowego, amarantowego, lila, czerwonego lub pink. Udowodnić, że istnieje taka łamana przechodząca przez 4 punkty i przez każdy tylko raz, że jest pomalowana jednym kolorem.

**2.6.** Niech  $w, k, s$  oznaczają odpowiednio liczby: wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. Czy istnieje taki wielościan, w którym:

- $w = 13, k = 35, s = 24,$
- $w = 25, k = 37, s = 14?$