Finałowe i zwardoniowe geometrie (i nie tylko)

28.04.2009

1. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2\dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60 . Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ można wybrać punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ na krawędziach odpowiednio $A_2S, A_3S, \dots, A_nS$ tak, by spełniona była nierówność:

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n\quad 1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Okrąg o średnicy AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach A i K. Prosta KH przecina odcinek BC w punkcie M. Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka BC.

3. Do boku CA trójkąta ABC należy taki punkt D, że AB =CD oraz spełniony jest warunek $\angle ACB = \angle ABD$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie E. Udowodnić, że $AB||DE$.

4. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że $\angle AKC = \angle BLC = 90$ oraz $\angle CAK = \angle CBL$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wykazać, ze $MK = ML$.

5. Trzy różne okręgi o_1, o_2 i o_3 o równych promieniach leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta. Okrąg o środku w punkcie P jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2 i o_3. Wykazać, że punkt P, środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leżą na jednej prostej.

6. Kwadrat o boku długości 1 pokryto m^2 prostokątami. Dowieść, że obwód pewnego z nich jest niemniejszy niż $\frac{4}{m}$.