Estońska olimpiada

1. Pokazać, że jeśli dla $x, y \in \mathbb{Z}^+$ liczba $\frac{x^2+y^2+6}{xy}$ jest liczbą całkowitą, to jest też sześcianem liczby całkowitej.

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równości:

$$f(x) = -f(-x)$$

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$$

3. Niech ABC będzie trójkątem rozwartokątnym, H jego ortocentrum zaś A_1, B_1, C_1 punktami na bokach BC, AC, AB odpowiednio. Pokazać, że odcinki stycznych poprowadzonych z punktu H do okręgów o średnicach AA_1,BB_1,CC_1 pomiędzy punktem H a punktami styczności, mają równe długości.

4. Niech ABC będzie trójkątem w którym $\angle ACB = 90°$. Punkt D leży na półprostej CB i spełnia warunek $AC \cdot CD = BC^2$. Prosta równoległa do AB przechodząca przez D przecina prostą AC w E. Znaleźć miarę kąta $\angle BEC$.

5. Pokazać, że dla a, b, c rzeczywistych dodatnich zachodzi nierówność:

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3}$$

Kiedy zachodzi równość?

6. Niech l-ka będzie figurą złożoną z czterech kwadracików jednostkowych: trzech ułożonych w rzędzie, stykających się bokami i jednym zetkniętym bokiem do jednego z kwadracików na końcu tego rzędu, ale nie ułożonym z pozostałymi w rzędzie. Znaleźć wszystkie n dla których szachownicę $2n + 1 \times 2n + 1$ z wyciętym jednym rogiem, da się pokryć l-kami.

7. Niech $\kappa(n)$ będzie sumą odwrotności dodatnich dzielników liczby n. Liczba a będzie nazwana samotną, jeśli dla żadnej liczby $b \neq a$ nie zachodzi $\kappa(a) = \kappa(b)$.

(a) pokazać, że wszystkie liczby pierwsze są samotne.

(b) pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb niesamotnych.