

Mhoczne kółeczko z niezmienników i Dirichleta

14.01.2009

1. W kółku siedzi 666 dzieci, wśród nich najstarszy jest Alek, który ma 666 cukierków. Co jakiś czas Alek wybiera jakieś dziecko, które ma co najmniej dwa cukierki i każe mu dać po cukierku sąsiadom wybranego dziecka (dzieci są posłuszne i słuchają starszego kolegi). Czy możliwe jest, aby po pewnej liczbie takich operacji każde dziecko miało po jednym cukierku?

2. Kasia ma w swoim wielkim terrarium 539 czerwonych, 607 niebieskich i 666 zielonych kameleonów. Kiedy spotkają się dwa różne kameleony, zmieniają kolor na ten trzeci. Czy możliwe jest, aby w pewnej chwili wszystkie kameleony były jednego koloru?

3. Z 666^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku 666. Każda płytka jest z jednej strony czarna, a z drugiej biała. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytkę P mającą boki wspólne z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

4. Między 66 miastami kursują samoloty czterech linii tak, że między każdymi dwoma miastami w obydwie strony latają samoloty dokładnie jednej linii. Pokazać, że można znaleźć takie trzy miasta, że połączenia między nimi obsługuje jedna linia lotnicza.

5. Danych jest ciąg 666 (niekoniecznie różnych) liczb całkowitych a_1, a_2, \dots, a_{666} . Pokazać, że istnieje takie dodatnie $k \leq 666$, że można wybrać k kolejnych wyrazów ciągu tak, że ich suma jest podzielna przez 666.

6. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 18 danych jest 666 punktów. Udowodnić, że pewne trzy z nich tworzą trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie co najwyżej 3.